STÖRUNGSTHEORETISCHE ZWEITEILCHENSTREU-QUERSCHNITTE IN DER FUNKTIONALEN QUANTEN-THEORIE DES NICHTLINEAREN SPINORFELDES

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Taghi Pouradjam
aus Täbriz / Iran

1980

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548921_0053

STÖRUNGSTHEORETISCHE ZWEITEILCHENSTREU-QUERSCHNITTE IN DER FUNKTIONALEN QUANTEN-THEORIE DES NICHTLINEAREN SPINORFELDES

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Taghi Pouradjam
aus Täbriz / Iran

1980

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung:	11. Juli 1980
Dekan:	Prof. Dr. W. Prandl
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. H. Stumpf
2. Berichterstatter:	Doz. Dr. habil. D. Großer

Inhaltsverzeichnis

I. Einleitung

II. Die Feldgleichungen

III. Funktionale Formulierung des Problems
- 3.1. Motivation
- 3.2. Der Funktionalraum
- 3.3. Das funktionale Skalarprodukt
- 3.4. Funktionale Feldgleichung des nichtlinearen Spinorfeldes
- 3.5. Funktionale Eigenwertgleichung und die S-Matrix

IV. Zweiteilchen-Streuquerschnitte
- 4.1. Einführung des Wirkungsquerschnittes
- 4.2. Die T-Matrix in der ersten Näherung
- 4.3. Berechnung des elastischen, unpolarisierten Wirkungsquerschnitts in erster Näherung
- 4.4. Die T-Matrix in der zweiten Näherung
- 4.5. Der Wirkungsquerschnitt

V. Schlußdiskussion

Anhänge I - VIII

Notation und Bezeichnungen

1) Das Einheitssystem ist das übliche System in der Quantenfeldtheorie

$$\hbar = c = 1 .$$

2) Die Metrik des Minkowski-Raumes ist definiert als:

$$g_{00} = 1 \; ; \; g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \; ; \; g_{\mu\nu} = 0 \quad \mu \neq \nu .$$

$$x^2 = x_\mu x^\mu = x_\mu g^{\mu\nu} x_\nu = x_0^2 - \vec{x}^2 .$$

3) Die Dirac-Matrizen sind definiert als:

$$\left\{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \right\} = 2 g^{\mu\nu} .$$

4) Es gilt:

$$\left\{ \psi_\alpha(x), \psi_\beta(x') \right\} := \psi_\alpha(x) \psi_\beta(x') + \psi_\beta(x') \psi_\alpha(x) .$$

5) Im allgemeinen wird die Summen- bzw. Integrationskonvention verwendet: Über die doppeltvorkommenden Indizes wird summiert und über die doppeltvorkommenden Variablen wird integriert.

I. Einleitung

Die nichtlineare Spinortheorie entstand mit dem Gedanken, daß sich alle Elementarteilchen und ihre Wechselwirkungen aus einem selbstwechselwirkenden Spinorfeld ableiten lassen sollten /1/. Dieses "Urfeld" sollte selbst unbeobachtbar sein und müßte Spinoreigenschaften haben, um auch Teilchen mit halbzahligem Spin beschreiben zu können. Es müßte außerdem einer nichtlinearen Feldgleichung genügen, damit die Beschreibung der Wechselwirkung möglich ist. So entstand unter Berücksichtigung der noch erforderlichen Symmetrien die Heisenberg-Pauli-Gleichung /2/. Um die Endlichkeit der Theorie zu gewährleisten, forderte Heisenberg statt der üblichen kanonischen Quantisierung eine nichtkanonische Quantisierung für das unbeobachtbare Spinorfeld /3/. Dadurch wird aber die übliche Teilcheninterpretation nicht mehr möglich. Die Situation erscheint in gewisser Hinsicht analog zur Quantenelektrodynamik. Dort existieren neben den Feldstärken $F_{\mu\nu}(x)$ auch noch die formal als Hilfsfelder eingeführten lokal gekoppelten Vektorpotentiale, die nicht beobachtet werden können und nur bezüglich ihrer transversalen Anteile eine Teilcheninterpretation zulassen. In der Gupta-Bleuler-Formulierung der Quantenelektrodynamik wird bekanntlich $A_\mu(x)$ als ein linearer Operator in einem erweiterten Zustandsraum mit indefiniter Metrik aufgefaßt /4/. Dadurch konnte man die Quantenelektrodynamik in einer manifest-kovarianten, manifest-kausalen Form beschreiben, was bei der nichtlokalen Beschreibung im positiv-definiten Zustandsraum, der Dirac-Schwinger-Formulierung, nicht möglich war. Die Anteile, die keine Teilcheninterpretation zulassen, hängen nun mit den Geisterzuständen zusammen und erzeugen im physikalischen Unterraum das Phänomen der Coulombwechselwirkung und der Eichinvarianz /5/.

Es liegt also nahe, auch die Spinorfelder als Hilfsfelder aufzufassen, mit denen nun die Theorie der Elementarteilchen in einem Zustandsraum mit indefiniter Metrik formuliert wird. Der Unterschied liegt darin, daß die Einführung eines Zustandsraumes mit indefiniter Metrik in der Quantenelektrodynamik nur eine Möglichkeit für die lokale Formulierung der Quantenelektrodynamik darstellt und darüber hinaus keine weiteren Konsequenzen mit sich bringt. In der nichtlinearen Spinortheorie er-

weist sich dagegen die indefinite Metrik als unerläßlich, wenn man, wie im Lee-Modell /6/, die auftretenden Ultraviolett-Divergenzen durch Einführung eines zusätzlichen Doppelpols in den Propagator, die Dipolgeistregularisierung, vermeiden will /7/. Es stellt sich nämlich heraus, daß in diesem Fall das Källén-Lehmann-Theorem zwangsläufig auf einen Zustandsraum mit indefiniter Metrik führt /2/. Die Einführung der indefiniten Metrik hat hier also grundlegende Konsequenzen: die Theorie wird dadurch endlich.

In diesem erweiterten Zustandsraum existieren nun, neben den Zuständen positiver Norm, auch solche negativer und verschwindender Norm. Weil aber die Zustandsnorm mit den quantenmechanischen Wahrscheinlichkeiten in Verbindung gebracht wird, machen diese unphysikalischen Zustände, Geister und Dipolgeister genannt, die übliche Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Quantentheorie unbrauchbar. In solchen Theorien ist der Zustandsraum eine nicht-unitäre Darstellung der Symmetriegruppen der Theorie. Sie lassen daher nicht ohne weiteres eine physikalisch vernünftige Interpretation zu. Zusätzliche Mechanismen ermöglichen erst die Interpretierbarkeit der Theorie. Diese Mechanismen werden allgemein "Unitarisierung" genannt. Für die Unitarisierung existieren verschiedene Methoden /8/.

Legt man nun eine nichtlineare Spinorgleichung mit den oben geschilderten Eigenschaften für die Beschreibung der Elementarteilchen zugrunde, so muß erstens eine Lösungstheorie für diese Operatorgleichung angegeben werden. Zweitens muß man in der Lage sein, einen Zustandsraum mit indefiniter Metrik zu konstruieren. Nun ist bislang weder eine solche Lösungstheorie bekannt, noch ist die mathematische Theorie der Räume mit indefiniter Metrik vollständig ausgearbeitet. Diese beiden Probleme hängen mehr oder minder zusammen und sind, wie erwähnt, weitgehend ungelöst. Daher wird eine derartige Theorie für die Projektionen eines bestimmten Zustandes auf ein von den Feldoperatoren erzeugtes zyklisches Basissystem formuliert. Für diese Projektionsamplituden (τ - Funktionen) können dann unendliche, gekoppelte Gleichungssysteme hergeleitet werden, die eine Zustandsbeschreibung gestatten /9/. Dafür erweist sich der Funktionalformalismus, wie bei allen Problemen unendlich vieler Freiheitsgrade, als zweckmäßig. In der

nichtlinearen Spinortheorie ist dieser Formalismus besonders vorteilhaft, weil dann die Abänderungen, wie nichtkanonische Quantisierung, zwanglos in die Theorie eingefügt werden können. Diese Sachverhalte führten H. Stumpf zur Entwicklung einer funktionalen Quantentheorie, die keinen Bezug mehr auf den Hilbertraum der konventionellen Quantentheorie nimmt /10/. In einem sogenannten Funktionalraum werden dann die Symmetrieobservablen und die S-Matrix konstruiert /11/12/.

In der vorliegenden Arbeit wird der Funktionalformalismus auf das Modell eines selbstgekoppelten Spinorfeldes angewandt. Die Absicht dabei ist, das in /21/ ausgearbeitete Skalarprodukt für die Berechnung der S-Matrix zu testen. Die Unitarisierung wird in dieser Arbeit nicht vorgenommen. Das betrachtete Modell ist motiviert durch ein Modell des skalaren Falles /13/. Es ist folgendermaßen charakterisiert:

1. Die Masse der Teilchen, die in der nichtlinearen Spinortheorie durch die nichtabschaltbare Wechselwirkung zustande kommt, wird hier von vornherein in die Feldgleichung inkorporiert (Kopplungstheorie).
2. Die Feldgleichung ist von der dritten Ordnung, was der Regularisierung des Propagators entspricht.
3. Der quantenmechanische Hilbertraum besitzt eine indefinite Metrik. Der Feldoperator erfüllt die nichtkanonischen Vertauschungsrelationen.
4. Als Wechselwirkungsterm wird ein allgemeiner Ψ^3-Kopplungsterm betrachtet (Fermi-Kopplung).

In Kapitel II wird die Feldgleichung angegeben, und es werden die Vertauschungsrelationen abgeleitet. In den Kapiteln III und IV wird der Funktionalraum konstruiert und die Feldgleichung funktional formuliert. Außerdem wird noch eine funktionale Eigenwertgleichung für die Berechnung der S-Matrix abgeleitet. In Kapitel V werden dann die T-Matrix und der totale unpolarisierte Wirkungsquerschnitt für die elastische NN-Streuung in der ersten Näherung ausgerechnet. Außerdem wird noch der isotrope Anteil des Wirkungs-

querschnitts in der zweiten Näherung berechnet. Zum Schluß werden die Ergebnisse mit denjenigen anderer Methoden, vor allem des skalaren Falles, verglichen.

II. Feldgleichungen

Wir gehen von dem dipolgeist-regularisierten Propagator des nichtlinearen Spinorfeldes aus, den wir nach /14/ folgendermaßen ansetzen:

$$F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \rho_1(m'^2) \frac{(k+\mu)^2(k+m')}{(m'^2-k^2)(\mu^2-k^2)^2} e^{-ik(x-x')} \, dk \, dm'^2 \qquad (2.1)$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^4} \int \rho_2(m'^2) \frac{(-k+\mu)^2(-k+m')}{(m'^2-k^2)(\mu^2-k^2)^2} e^{-ik(x-x')} \, dk \, dm'^2 .$$

Betrachtet man nur eine Parität, $\rho_2(m'^2) = 0$, und macht die übliche "freie" Näherung, $\rho_1(m'^2) = \delta(m'^2 - \varkappa^2)$, so entspricht (2.1) dem Propagator eines freien Feldes $\psi(x)$, das der Feldgleichung höherer Ordnung

$$(-i\partial\!\!\!/ + \varkappa)(-i\partial\!\!\!/ + \mu)^2 \psi(x) = 0 \qquad (2.2)$$

genügt. Das Feld $\psi(x)$ ist außerdem nicht-kanonisch quantisiert, wie es im Anhang I gezeigt wird. Es gilt also

$$\left\{ \psi_\alpha(x), \bar{\psi}(x') \right\}\Big|_{x_0 = x_0'} = 0 \quad ; \quad \bar{\psi}(x) := \gamma^0 \psi^+(x) \qquad (2.3)$$

Die nichtkanonische Quantisierung entspricht aber der Einführung der indefiniten Metrik in den Zustandsraum, wie man aus der Lehman-Spektralzerlegung des Propagators (2.1) sieht (Anhang I). Das bedeutet, daß die Dipolgeistregularisierung der Form (2.1) automatisch zu Feldgleichungen höherer Ordnung führt. In diesem Zusammenhang kann man auf das Folgende hinweisen: Die Dipolgeistregularisierung, die indefinite Metrik im Zustandsraum und die nichtkanonische Quantisierung hängen, wie wir oben gesehen haben,

zusammen. Sie manifestieren nämlich die Tatsache, daß in solchen Theorien der Zustandsraum eine nichtunitäre Darstellung der Symmetriegruppen ist. Diese Theorien sind daher ohne eine weitere Prozedur weder interpretierbar noch brauchbar. Die zusätzliche Prozedur muß notwendigerweise für die globalen Observablen, die kommutierenden Operatoren und die S-Matrix definiert werden, weil gerade diese Operatoren nichtunitär werden. Während nun die Symmetrieoperatoren einfach auf den positiven Unterraum des indefiniten Zustandsraumes abgebildet werden können, bleibt die S-Matrix nichtunitär und muß unitarisiert werden. Diese Unitarisierung soll uns aber hier nicht beschäftigen /14/.

Aus der üblichen Definitionsgleichung

$$(-i\not{\partial}+\varkappa)(-i\not{\partial}+\mu)^2 G(x-x') = \delta(x-x') \tag{2.4}$$

folgt für die Greenfunktion die Gleichung:

$$G(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{(\not{k}+\mu)^2(\not{k}+\varkappa)}{(\varkappa^2-k^2+i\varepsilon)(\mu^2-k^2+i\varepsilon)^2}\, e^{-ik(x-x')}\, dk\,. \tag{2.5}$$

Weiter folgt für die Zweipunktfunktionen F(x-x') mit (A.1.2), (A.1.4) und (A.1.5) die Gleichung

$$(-i\not{\partial}+\varkappa)(-i\not{\partial}+\mu)^2 F_{\alpha\beta}(x-x') = -i\,\delta(x-x')\,\delta_{\alpha\beta}\,, \tag{2.6}$$

mit

$$F_{\alpha\beta}(x-x') = \langle 0|T\,\psi_\alpha(x)\,\bar{\psi}_\beta(x')|0\rangle = \tag{2.7}$$

$$= -\frac{i}{(2\pi)^4}\int \frac{(\not{k}+\mu)^2(\not{k}+\varkappa)}{(\varkappa^2-k^2+i\varepsilon)(\mu^2-k^2+i\varepsilon)^2}\, e^{-ik(x-x')}\, dk\,.$$

Aus (2.6) folgt, daß der Feldoperator $\Psi(x)$ die Längendimension $(-\frac{1}{2})$ besitzt.

Als Wechselwirkung werden wir eine lokale renormierbare Fermion-Wechselwirkung annehmen /14/15/16/. Die Feldgleichung lautet dann

$$(-i\partial\!\!\!/+\mu)(-i\partial\!\!\!/+\varkappa)(-i\partial\!\!\!/+\mu)\Psi(x) = -2g_0 :V_\mu \Psi(x)\bar{\Psi}(x)V^\mu\Psi(x): \quad (2.8)$$

Die Doppelpunkte bedeuten die Normalordnung der Feldoperatoren.

Die Gleichung (2.8) hat natürlich auch noch Spinorindizes, die wir hier unterdrücken wollen. Es sei noch darauf hingewiesen, daß g_o in (2.8) nicht dimensionslos ist, sondern die Längendimension (-2) besitzt. Wie wir aber später sehen werden, hat das keine Überrenormierung der Theorie zur Folge.

Die Gleichung (2.8) wird die Grundlage für die funktionale Formulierung der nichtlinearen Spinortheorie sein, der wir uns nun zuwenden wollen. Die Vertexfunktion V_μ, die in (2.8) vorkommt, ist im Anhang VII (A.7.6) angegeben worden.

III. Funktionale Formulierung des Problems

3.1. Motivation

Wir gehen von der nichtlinearen Spinorgleichung, die im vorigen Kapitel angegeben wurde, und deren adjungierter Gleichung aus:

$$(-i\not{\partial}+\Gamma)(-i\not{\partial}+\varkappa)(-i\not{\partial}+\Gamma)\,\Psi(x) = -2g_0 :V_\mu \Psi(x)\bar{\Psi}(x)V^\mu\Psi(x):, \tag{3.1}$$

$$(i\not{\partial}+\Gamma)(i\not{\partial}+\varkappa)(i\not{\partial}+\Gamma)\,\bar{\Psi}(x) = 2g_0 :V_\mu \bar{\Psi}(x)\bar{\Psi}(x)V^\mu\Psi(x):.$$

Setzt man wie in /16/

$$\Psi(x) := \Psi_1(x)$$
$$\bar{\Psi}(x) := \Psi_2(x)$$

ein, so kann die Gleichung (3.1) auf die folgende Form gebracht werden:

$$(-i\Gamma^\mu_{\alpha\rho}\partial_\mu + \Gamma\delta_{\alpha\rho})(-i\Gamma^\mu_{\beta\delta}\partial_\mu + \varkappa\delta_{\beta\delta})(-i\Gamma^\mu_{\delta\gamma}\partial_\mu + \Gamma\delta_{\delta\gamma})\,\Psi_\gamma(x) =$$
$$= g_0 V_{\alpha\beta\gamma\eta} :\Psi_\beta(x)\Psi_\gamma(x)\Psi_\eta(x):. \tag{3.2}$$

Die auftretenden Indizes sind Doppelindizes /16/. Es gilt z.B.:

$$\alpha := (\alpha,\beta_1) \quad ; \quad \beta := (\beta,\beta_2) \quad , \quad \text{usw},$$

mit

$$\alpha,\beta = 1,2 \quad ; \quad \beta_1,\beta_2 = 0,1,2,3.$$

Es gelten noch die Definitionen

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} := \gamma^{\mu} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \; V_{\alpha\beta\gamma\delta} := 2 B_{\alpha\beta,\mu} C^{\mu}_{\gamma\delta} \tag{3.3}$$

mit

$$B_{\alpha\beta,\mu} := V_{\mu} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \; C^{\mu}_{\gamma\delta} := V^{\mu} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Operator

$$\psi_{\alpha}(x) := \psi_{\alpha\beta}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{1\beta}(x) \\ \psi_{2\beta}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{\beta}(x) \\ \bar{\psi}_{\beta}(x) \end{pmatrix}$$

ist im allgemeinen nicht hermitesch /16/.

Außerdem gilt die Vertauschungsrelation

$$\left\{ \psi_{\alpha}(x), \psi_{\alpha'}(x') \right\}_{x_0 = x'_0} = 0 \,. \tag{3.4}$$

Neben der Gleichung (3.2) müssen noch gewisse Symmetrierelationen erfüllt sein /19/20/. Man fordert, daß der Zustandsraum ein Darstellungsraum der Symmetriegruppen sein soll /20/. Hier betrachten wir nur die Poincarégruppe: Seien P_{μ} und $M_{\mu\nu}$ infinitesimale Generatoren der Poincarégruppe und $\mathbb{P}_{\mu}$ und $\mathbb{M}_{\mu\nu}$ eine Darstellung für sie im feldtheoretischen Hilbertraum. Um die Quantenzahlen zu definieren, brauchen wir einen vollständigen Satz kom-

mutierender Operatoren. Die Menge $|P_\mu P^\mu, \Pi_\mu \Pi^\mu, P_\mu, \Pi_3\rangle$ ist ein solcher Satz /21/. Der Operator Π_μ bedeutet dabei /16/:

$$\Pi^\mu := \frac{1}{2m}\, \varepsilon^{\mu\beta\gamma\nu} P_\beta M_{\gamma\nu}.$$

Für einen Eigenzustand $|a\rangle$ dieser Operatoren gilt /21/:

$$P_\mu |a\rangle = \lambda_\mu |a\rangle \quad ; \quad P_\mu P^\mu |a\rangle = m^2 |a\rangle$$

$$\Pi_\mu \Pi^\mu |a\rangle = s(s+1)|a\rangle \quad ; \quad \Pi_3 |a\rangle = s_3 |a\rangle \qquad (3.5)$$

Bei kanonischen Vertauschungsrelationen kann die explizite Gestalt der P_μ und $M_{\mu\nu}$ korrespondenzmäßig übertragen werden, jedoch nicht mehr bei nichtkanonischer Quantisierung. Es sei hier darauf hingewiesen, daß ein vollständiger Satz kommutierender Observablen nicht zur Charakterisierung eines Zustandes ausreicht. Dazu sind auch noch Randbedingungen erforderlich. Die S-Matrix beschreibt den Übergang einlaufender in auslaufende Zustände und beinhaltet also diese Randbedingungen. Sie dient daher, zusammen mit den kommutierenden Observablen, zur vollständigen Charakterisierung des Zustandsraumes /21/.

Das Problem wäre gelöst, wenn wir in der Lage wären, eine explizite Operatordarstellung anzugeben, die die Feldgleichung (3.2) und die Bedingungen (3.4) und (3.5) erfüllt. Dies ist aber eine sehr schwierige Aufgabe und nur für sehr einfache Fälle gelöst worden /20/. Man versucht daher, die einzelnen Zustände mit Hilfe der sogenannten τ - Funktionen zu konstruieren /1 /. Diese τ - Funktionen sind definiert als

$$\tau_n \left(\begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \end{matrix} \middle| a \right) := \langle 0 | T\, \psi_{\alpha_1}(x_1) \cdots \psi_{\alpha_n}(x_n) | a \rangle ; \quad 1 \le n \le \infty. \qquad (3.6)$$

Das Problem wird dann zurückgeführt auf die Berechnung der τ - Funktionen. Zu diesem Zweck erweist sich der Funktionalformalismus als günstig /22/. Die Relationen für die τ - Funktionen lassen sich in diesem Formalismus sehr kompakt schreiben. Ein weiterer Vorteil ist, daß dieser Formalismus flexibel ist und sowohl auf die kanonische als auch auf die nichtkanonische Quantisierung angewendet werden kann.

Das Ziel bei diesem Formalismus ist, sich vom Begriff des Feldoperators zu lösen und die Theorie allein durch die τ - Funktionen zu reproduzieren, deren Berechnung sich im Funktionalraum abspielt. Der feldtheoretische Hilbertraum spielt dann nur noch eine heuristische Rolle und kann schließlich ganz vergessen werden. Wir wollen in dem folgenden Abschnitt nun den Funktionalraum konstruieren.

3.2. Der Funktionalraum

Ein Funktional ist im Allgemeinen eine Funktion, deren Argument selbst eine skalar- oder operatorwertige Funktion ist /20/. Beispiele hierfür aus der klassischen Physik sind Wirkungsfunktional, Lagrange-Funktional usw.. In die Quantenfeldtheorie wurde das Vakuum-Funktional von Schwinger eingeführt /22/. Die Formulierung der Quantentheorie mit den Funktionalen, die funktionale Quantentheorie, wurde von Stumpf vorgenommen /23/10a/. Dabei geht man von folgender Definition aus:

Def.: Die funktionale Quantentheorie ist durch einen Isomorphismus vom Zustandsraum $\mathcal{H}$ der Theorie in den Funktionalraum $\mathcal{F}$ gegeben /20/: $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F}$.

Für den Fall des nichtlinearen Spinorfeldes ist der Isomorphismus durch die Abbildung

$$|a\rangle \longrightarrow |\psi(j,a)\rangle \tag{3.7}$$

definiert.

Das "erzeugende" Funktional lautet dabei

$$|A(j,a)\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \int i^n \tau_n \left(\begin{matrix} x_1 \cdots x_n \\ \alpha_1 \cdots \alpha_n \end{matrix} \middle| a \right) | D_n \left(\begin{matrix} \alpha_1 \cdots \alpha_n \\ x_1 \cdots x_n \end{matrix} \right) \rangle \, dx_1 \cdots dx_n \quad (3.8)$$

mit τ_n aus (3.6).

Die Basisfunktionale D_n in (3.8) werden durch die funktionalen Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren $j_\alpha(x)$ und $\partial_\alpha(x)$ aufgebaut, wobei x ein Punkt im Minkowskiraum und α ein spinorieller Index ist. Diese Operatoren bilden bezüglich der Antikommutatorrelation eine Clifford-Algebra /16/. Es gilt also

$$\left\{ j_\alpha(x), j_\beta(x') \right\} = \left\{ \partial_\alpha(x), \partial_\beta(x') \right\} = 0 \,, \quad (3.8')$$

$$\left\{ j_\alpha(x), \partial_\beta(x') \right\} = \delta_{\alpha\beta} \delta(x - x') \,.$$

Fordert man noch die Existenz eines invarianten funktionalen Grundzustandes $|\varphi_0\rangle$ durch

$$\partial_\alpha(x) |\varphi_0\rangle = 0 \,, \quad (3.9)$$

so kann für die Basisfunktionale D_n geschrieben werden:

$$\left| D_n \left(\begin{matrix} \alpha_1 \cdots \alpha_n \\ x_1 \cdots x_n \end{matrix} \right) \right\rangle = \frac{1}{n!} j_{\alpha_1}(x_1) \cdots j_{\alpha_n}(x_n) |\varphi_0\rangle \,; \; 1 \le n < \infty \quad (3.10)$$

bzw.

$$\left\langle D_n^+ \left(\begin{matrix} x_1 \cdots x_n \\ \alpha_1 \cdots \alpha_n \end{matrix} \right) \right| = \langle \varphi_0 | \frac{1}{n!} \partial^{\alpha_1}(x_1) \cdots \partial^{\alpha_n}(x_n) \,; \; 1 \le n < \infty \,. \quad (3.11)$$

Sie sollen der Orthogonalitätsrelation

$$\langle D_n\begin{pmatrix}\alpha_1 \cdots \alpha_n\\ x_1 \cdots x_n\end{pmatrix} | D_m\begin{pmatrix}x'_1 \cdots x'_m\\ \alpha'_1 \cdots \alpha'_m\end{pmatrix}\rangle = \tag{3.12}$$

$$= \delta_{mn}\frac{1}{(n!)^2}\sum_{\lambda_1 \cdots \lambda_n}(-)^P \delta^{\alpha_1}_{\alpha'_{\lambda_1}}\delta(x_1 - x'_{\lambda_1}) \cdots \delta^{\alpha_n}_{\alpha'_{\lambda_n}}\delta(x_n - x'_{\lambda_n})$$

genügen /21/. Es können auch andere Basisfunktionale definiert werden /23/.

Der feldtheoretische Zustandsraum muß ein Darstellungsraum der Symmetriegruppen sein. Man verlangt dies auch vom funktionalen Zustandsraum. Daß die Abbildung (3.7) ein Isomorphismus sein soll, garantiert gerade, daß dies der Fall ist. Das heißt: durch die Abbildung (3.7) wird auch jeder Darstellung der Symmetriegruppen in $\mathcal{H}$ eine Darstellung in $\mathcal{F}$ zugeordnet.

Wir betrachten hier nur die Poincarégruppe als die Symmetriegruppe. Dann folgt aus der Gültigkeit von (3.5) für $|a\rangle$ auch die für $|\psi(j,a)\rangle$ aufgrund der Isomorphie der Abbildung (3.7). Das führt bei den Quelloperatoren $j_\alpha(x)$ und $\partial_\alpha(x)$ zu den Transformationseigenschaften /10b/

$$V^{-1}(\Lambda,d)\, j_\alpha(x')\, V(\Lambda,d) = L^\beta_\alpha(\Lambda)\, j_\beta(\Lambda^{-1}(x'-d)); \tag{3.13}$$

$$V^{-1}(\Lambda,d)\, \partial_\alpha(x')\, V(\Lambda,d) = L^\beta_\alpha(\Lambda)\, \partial_\beta(\Lambda^{-1}(x'-d)).$$

V ist eine Darstellung der Poincarégruppe (Λ,d) im Funktionalraum. Für $|\psi(j,a)\rangle$ folgt dann

$$|\psi(j,a)\rangle' = V(\Lambda,d)\,|\psi(j,a)\rangle. \tag{3.14}$$

Eine Operatordarstellung für $j_\alpha(x)$ und $\partial_\alpha(x)$, die nur (3.8') erfüllt, wurde u.a. von Rzewuski, Berezin und Cloester

/24/ mit Hilfe einer Jordan-Wigner-Algebra angegeben. Schwieriger ist die Angabe einer Operatordarstellung, die auch (3.13) erfüllt. Eine solche Darstellung wurde für Spinorfunktionale von Stumpf angegeben /16/.

Die Eigenwertgleichungen (3.5) lauten dann für $|\Psi(j,a)\rangle$:

$$P_\mu |\Psi(j,a)\rangle = \mathfrak{J}_\mu |\Psi(j,a)\rangle \quad ; \; G_\mu G^\mu |\Psi(j,a)\rangle = s(s+1)|\Psi(j,a)\rangle \,, \tag{3.15}$$

$$P^2 |\Psi(j,a)\rangle = m^2 |\Psi(j,a)\rangle \quad ; \; G_3 |\Psi(j,a)\rangle = s_3 |\Psi(j,a)\rangle \,.$$

Dabei bedeuten:

$$P_\mu := \int j_\alpha(x) P_\mu(x) \partial^\alpha(x) \, dx \,,$$

$$m_{\mu\nu} := \int j_\alpha(x) M_{\mu\nu}(x) \partial^\alpha(x) \, dx \,,$$

$$G_\mu := \frac{1}{2m} \varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} P_\nu m_{\varrho\sigma} \,. \qquad \text{(Pauli-Lubanski-Spinvektor)}$$

P_μ und $M_{\mu\nu}$ sind hierbei die Generatoren der Poincarégruppe im feldtheoretischen Hilbertraum $\mathcal{H}$.

Damit das Konzept vollständig ist, muß noch ein Skalarprodukt im Funktionalraum angegeben werden. Das soll im nächsten Abschnitt geschehen. Hier soll zum Schluß die Transformation auf die sogenannten Φ - Funktionale angegeben werden. Die Verwendung der Φ - Funktionale anstatt der Ψ - Funktionale ist im Zusammenhang mit der dynamischen Gleichung vorteilhaft. Diese Transformation ist definiert durch

$$|\Psi(j,a)\rangle = \exp\left[-\tfrac{1}{2} j_\alpha(x) F_{\alpha\beta}(x-y) j_\beta(y)\right] |\Phi(j,a)\rangle \tag{3.16}$$

Im Exponenten wurde die Integral- und Summenkonvention benützt. $F(x,y)$ bedeutet dabei die zeitgeordnete freie Zweipunktfunktion des Spinorfeldes. Zur Beschreibung des Problems sind die zwei Funktionale $|\psi(j,a)\rangle$ und $|\Phi(j,a)\rangle$ äquivalent /20/.

Das "erzeugende" Funktional $|\Phi(j,a)\rangle$ kann dargestellt werden durch /21/

$$|\Phi(j,a)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int i^n \varphi\left(\begin{matrix} x_1 \cdots x_n \\ \alpha_1 \cdots \alpha_n \end{matrix} \middle| a\right) \left| D_n\left(\begin{matrix} \alpha_1 \cdots \alpha_n \\ x_1 \cdots x_n \end{matrix}\right)\right\rangle dx_1 \cdots dx_n \qquad (3.17)$$

mit

$$\varphi\left(\begin{matrix} x_1 \cdots x_n \\ \alpha_1 \cdots \alpha_n \end{matrix} \middle| a\right) := \frac{1}{i^n} \partial_{\alpha_n}(x_n) \cdots \partial_{\alpha_1}(x_1) |\Phi(j,a)\rangle \Big/_{j=0} . \qquad (3.18)$$

Bei dem Übergang von ψ - Funktionalen auf die Φ - Funktionale bleiben die Symmetrierelationen (3.15) unverändert; man muß lediglich $|\psi(j,a)\rangle$ durch $|\Phi(j,a)\rangle$ ersetzen /21/. Der Isomorphismus ist dann $|a\rangle \longmapsto |\Phi(j,a)\rangle$.

Die Transformation (3.17) geht im Fall der freien Felder in die bekannte Wick-Regel über.

3.3. Das funktionale Skalarprodukt

Im letzten Abschnitt wurde erwähnt, daß die beiden Funktionale $|\psi(j,a)\rangle$ und $|\Phi(j,a)\rangle$, abgesehen von dem Vorteil, den $|\Phi(j,a)\rangle$ im Zusammenhang mit der dynamischen Gleichung mit sich bringt, für den Aufbau des Funktionalraumes und die Beschreibung des Problems gleichwertig sind. Man führt daher gewöhnlich die Transformation (3.16) durch und arbeitet nur mit den Φ - Funktionalen. Aus diesem Grund geben wir hier das Skalarprodukt auch nur für das Φ - Funktional an.

Wir betrachten also die Abbildung

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{S} : \quad |a\rangle \longrightarrow |\Phi(j,a)\rangle ,$$

mit (3.17) als erzeugendem Funktional:

$$|\Phi(j,a)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int i^n \varphi_n \begin{pmatrix} x_1 \cdots x_n \\ \alpha_1 \cdots \alpha_n \end{pmatrix} a \Big) \, | D_n \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdots \alpha_n \\ x_1 \cdots x_n \end{pmatrix} \rangle \, dx_1 \cdots dx_n . \qquad (3.17)$$

In $\mathcal{H}$ soll ein Skalarprodukt $\langle a \,|\, b \rangle$ definiert werden können. Wir wollen nun untersuchen, wie sich dieses Produkt bei der Abbildung in den Funktionalraum verhält, oder genauer, ob es durch die Entwicklungskoeffizienten φ_n in (3.17) ausgedrückt werden kann. Dies wurde von Stumpf getan /21/. Im folgenden soll dieser Weg skizziert werden.

Die Koeffizienten φ_n können nach /21/12/ und in Analogie zu den τ-Funktionalen als Projektionen des Zustandes $|a\rangle \in \mathcal{H}$ auf den Vektor

$$\Big\{ \langle\!\langle x_1 \cdots x_n | := \langle 0 | N \psi_{\alpha_1}(x_1) \cdots \psi_{\alpha_n}(x_n) , \; x_i \in M^4 ,$$

$$1 \le i \le n , \; 1 \le n < \infty \Big\} \qquad (3.19)$$

betrachtet werden. Das Symbol "N" bedeutet die Anwendung der Wick-Regel auf die zeitgeordneten Funktionen und ist äquivalent zur Normalordnung nur im Falle des freien Feldes /21/. Auf der anderen Seite kann nun (3.19) als eine nicht-orthonormale Basis für die Zustandsbeschreibung benützt werden. Es gilt also die Relation

$$\langle\!\langle x_1 \cdots x_n | x'_1 \cdots x'_m \rangle\!\rangle_m = g_{nm}(x_1 \cdots x_n | x'_1 \cdots x'_n)$$

$$= \langle 0 | N \psi_{\alpha_1}(x_1) \cdots \psi_{\alpha_n}(x_n) | N \psi_{\beta_1}(x'_1) \cdots \psi_{\beta_m}(x'_m) | 0 \rangle , \qquad (3.20)$$

und der Zustand $|a\rangle \in \mathcal{H}$ kann durch

$$|a\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \sigma_n \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdots \alpha_n \\ x_1 \cdots x_n \end{pmatrix} a \Big) \Big| \begin{matrix} x_1 \cdots x_n \\ \alpha_1 \cdots \alpha_n \end{matrix} \Big\rangle_n \, dx_1 \ldots dx_n \tag{3.21}$$

dargestellt werden, wobei σ_n noch unbekannte Funktionen sind. Das Skalarprodukt $\langle a \mid b \rangle$ in $\mathcal{H}$ kann dann folgendermaßen geschrieben werden:

$$\langle a|b\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \int \varphi_n^x \begin{pmatrix} x_1 \cdots x_n \\ \alpha_1 \cdots \alpha_n \end{pmatrix} a \Big) \sigma_n \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdots \alpha_n \\ x_1 \cdots x_n \end{pmatrix} b \Big) dx_1 \cdots dx_n \tag{3.22}$$

mit

$$\frac{1}{n!} \varphi_n^x \begin{pmatrix} x_1 \cdots x_n \\ \alpha_1 \cdots \alpha_n \end{pmatrix} a \Big) := \Big\langle \begin{matrix} x_1 \cdots x_n \\ \alpha_1 \cdots \alpha_n \end{matrix} \Big| a \Big\rangle_n^x .$$

Zu der nicht-orthonormalen Basis (3.19) kann man eine dazu duale definieren; sie ist durch

$$\Big\langle \begin{matrix} x_1 \cdots x_n \\ \alpha_1 \cdots \alpha_n \end{matrix} \Big| \begin{matrix} \beta_1 \cdots \beta_m \\ x'_1 \cdots x'_m \end{matrix} \Big\rangle_n^m := \tag{3.23}$$

$$= \delta_{nm} \frac{1}{(n!)^2} P \sum_{\lambda_1 \cdots \lambda_n} (-)^P \delta_{\alpha_1}^{\beta_1} \delta(x_1 - x'_{\lambda_1}) \cdots \delta_{\alpha_n}^{\beta_n} \delta(x_n - x'_{\lambda_n})$$

gegeben. Der Zustand $|b\rangle \in \mathcal{H}$ kann also auch durch diese duale Basis dargestellt werden. Es gilt also noch

$$|b\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int \varphi_n \begin{pmatrix} x_1 \cdots x_n \\ \alpha_1 \cdots \alpha_n \end{pmatrix} b \Big) \Big| \begin{matrix} \alpha_1 \cdots \alpha_n \\ x_1 \cdots x_n \end{matrix} \Big\rangle^n dx_1 \ldots dx_n . \tag{3.24}$$

Aus (3.21) und (3.23) folgt dann

$$\frac{1}{n!}\sigma_n\begin{pmatrix}\alpha_1\cdots\alpha_n\\ x_1\cdots x_n\end{pmatrix}|a\rangle = {}^{n}\langle\begin{matrix}\alpha_1\cdots\alpha_n\\ x_1\cdots x_n\end{matrix}|a\rangle .$$

Man kann also die Mengen $\{\sigma_n\}$ und $\{\varphi_n\}$ als die ko- bzw. kontravarianten Komponenten des Zustandsvektors $|a\rangle$ betrachten.

Entsprechend existiert im Funktionalraum neben (3.17) auch noch ein duales Funktional, das lautet:

$$|\sigma(j,a)\rangle := \\ = \sum_{n=}^{\infty} i^n \int \sigma_n\begin{pmatrix}\alpha_1\cdots\alpha_n\\ x_1\cdots x_n\end{pmatrix}|a\rangle\,|D^n\begin{pmatrix}x_1\cdots x_n\\ \alpha_1\cdots\alpha_n\end{pmatrix}\rangle\, dx_1\cdots dx_n . \tag{3.25}$$

Mit (3.12) gilt dann die Beziehung

$$\langle a|b\rangle = \langle\Phi(j,a)|\sigma(j,a)\rangle . \tag{3.26}$$

Das heißt aber, daß wir einen Isomorphismus bezüglich des Skalarproduktes erzeugt haben. (3.22) kann also für die explizite Berechnung des Skalarproduktes verwendet werden. Natürlich ist dies nur dann möglich, wenn das duale Funktional bzw. die Menge $\{\sigma_n\}$ berechnet werden können. Das Funktional $|\Phi(j,a)\rangle$ soll ja durch die dynamische Gleichung bestimmt sein. Zur Berechnung des dualen Funktionals benützt man dann die Beziehung zwischen ko- und kontravarianten Komponenten, die durch den metrischen Fundamentaltensor gegeben ist. Multipliziert man nämlich (3.21) mit ${}_m\langle\begin{matrix}x'_1\cdots x'_m\\ \alpha'_1\cdots\alpha'_m\end{matrix}|$, so erhält man die Beziehung

$$\varphi_m\begin{pmatrix}x'_1\cdots x'_m\\ \alpha'_1\cdots\alpha'_m\end{pmatrix}|a\rangle = \\ = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int \sigma_n\begin{pmatrix}\alpha_1\cdots\alpha_n\\ x_1\cdots x_n\end{pmatrix}|a\rangle\, g_{mn}\begin{pmatrix}x'_1\cdots x'_m\\ \alpha'_1\cdots\alpha'_m\end{pmatrix}|\begin{matrix}x_1\cdots x_n\\ \alpha_1\cdots\alpha_n\end{matrix}\rangle\, dx_1\cdots dx_n , \tag{3.27}$$

wobei g_{mn} durch (3.20) gegeben ist.

Auf den Funktionalraum übertragen lautet (3.27):

$$|\Phi(j,a)\rangle = g(j)\,|\sigma(j,a)\rangle$$

mit

$$g(j) := \sum |\Phi(j,b)\rangle\langle\Phi(j,b)|$$

als direktem Produkt von zwei Zustandsfunktionalen. $|b\rangle$ ist ein vollständiges Basissystem. Im Anhang II wird das duale Funktional bzw. die Menge $\{\sigma_n\}$ für die Einteilchenzustände des Spinorfeldes explizit angegeben.

3.4. Funktionale Feldgleichung des nichtlinearen Spinorfeldes

Die Spinorfeldgleichung ist die Gleichung (3.2):

$$(-i\Gamma^{\mu}_{\alpha\rho}\partial_{\mu} + \mu\delta_{\alpha\rho})(-i\Gamma^{\mu}_{\rho\delta}\partial_{\mu} + \varkappa\delta_{\rho\delta})(-i\Gamma^{\mu}_{\delta\varkappa}\partial_{\mu} + \mu\delta_{\delta\varkappa})\,\psi_{\varkappa}(x) =$$

$$= g_0 V_{\alpha\varkappa\beta\eta} : \psi_{\varkappa}(x)\,\psi_{\beta}(x)\,\psi_{\eta}(x) : \qquad (3.2)$$

Nach dem Übergang zu dem Funktionalraum, wobei man die in Anhang I eingeführten Felder $A(x)$, $B(x)$ und $C(x)$ bzw. $\psi(x)$ und ihre gleichzeitigen Kommutatoren benützt, erhält man für die Feldgleichung (3.2):

$$D_{\alpha\delta}\,\partial_\gamma(x)\,|\Phi(j,a)\rangle = g_0\,V_{\alpha\gamma\beta\eta}\,\partial_\gamma(x)\,\partial_\beta(x)\,\partial_\eta(x)\,|\Phi(j,a)\rangle$$

$$-\,\Gamma^0_{\alpha\alpha'}\,A_{\alpha'\beta'}\,j_{\beta'}(x)\,|\Phi(j,a)\rangle \qquad (3.28)$$

mit

$$D_{\alpha\gamma} := \left(-i\,\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\,\partial_\mu + \mu\,\delta_{\alpha\beta}\right)\left(-i\,\Gamma^\mu_{\beta\delta}\,\partial_\mu + \varkappa\,\delta_{\beta\delta}\right)\left(-i\,\Gamma^\mu_{\delta\gamma}\,\partial_\mu + \mu\,\delta_{\delta\gamma}\right)$$

und $|\Phi(j,a)\rangle$ aus (3.8). $A_{\alpha\beta}$ ergibt sich hier aus der Kommutatorrelation der Felder A(x) und C(x) bzw. $\Psi(x)$. In unserem Fall lautet sie

$$A_{\alpha\beta} := \gamma^0 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.29)$$

Durch Anwendung der Transformation (3.16) auf (3.28) erreicht man, daß die Information über die Quantisierung nicht durch die gleichzeitigen Kommutatoren, sondern durch die Form der Zweipunktfunktion F eingeht. Zur Näherung der Φ-Funktionale wird ein Abbruchverfahren benützt.

Man erhält aus (3.28) die Gleichung

$$D_{\alpha\gamma}\,d_\gamma(x)\,|\Phi(j,a)\rangle = g_0\,V_{\alpha\gamma\beta\eta}:d_\gamma(x)\,d_\beta(x)\,d_\eta(x):\,|\Phi(j,a)\rangle$$

$$-\,\Gamma^0_{\alpha\alpha'}\,A_{\alpha'\beta'}\,j_{\beta'}(x)\,|\Phi(j,a)\rangle \qquad (3.30)$$

mit

$$d_\alpha(x) := -F_{\alpha\beta}(xy)\, j_\beta(y) + \partial_\alpha(x).$$

Mit der Gleichung

$$D_{\alpha\gamma} F_{\gamma\beta}(xy) = \Gamma^0_{\alpha\gamma} A_{\gamma\beta}\, \delta(x-y),$$

die aus (2.6) durch Aufstocken der Indizes folgt /16/, gelangt man schließlich zur Feldgleichung

$$D_{\alpha\alpha} \partial_\alpha(x) |\Phi(j,a)\rangle = g_0 V_{\alpha\gamma\varsigma\eta} : d_\gamma(x)\, d_\varsigma(x)\, d_\eta(x) : |\Phi(j,a)\rangle. \tag{3.31}$$

Aus dieser Gleichung werden wir die funktionalen Zustände berechnen. Dafür wird die Gleichung (3.31) mit der Greenfunktion

$$G_{\alpha\alpha'}(x-x')\, D_{\alpha'\beta} = \delta_{\alpha\beta}\delta(x-x') \tag{3.32}$$

invertiert. Man erhält

$$\partial_\beta(x) |\Phi(j,a)\rangle = g_0 G_{\beta\alpha}(x-x')\, V_{\alpha\gamma\varsigma\eta}\, d_\gamma(x') d_\varsigma(x') d_\eta(x') |\Phi(j,a)\rangle$$

$$+ \partial_\beta(x) |\Phi^c(j,a)\rangle. \tag{3.33}$$

Die Gleichung (3.32) folgt aus (2.4) durch Aufstocken der Indizes /16/.

Die Randbedingungen in (3.32) werden dadurch festgelegt, daß man für G und F den gleichen Integrationsweg wählt.

Das Funktional $|\Phi^c(j,a)\rangle$ in (3.33) ist eine Lösung der homogenen Funktionalgleichung

$$D_{\alpha\beta}\,\partial_\beta(x)\,|\Phi^c(j,a)\rangle = 0\,. \tag{3.34}$$

Es wird in Anhang IV angegeben.

Mit (3.33) und den Eigenwertgleichungen (3.15) haben wir nun gekoppelte Gleichungssysteme für die Berechnung der Zustände bzw. der Φ-Funktionen. Um das zu tun, führen wir die sogenannte Impuls-Symmetrisierung in (3.33) durch /28/. Dazu multiplizieren wir (3.33) mit $j_\beta(x)\,P_\lambda(x)\,\mathfrak{F}^\lambda$, summieren über β und integrieren über x. Das ergibt dann

$$(1-K)\,|\Phi(j,a)\rangle = |\Phi^c(j,a)\rangle\,, \tag{3.35}$$

wobei der Operator K lautet:

$$K := \frac{g_0}{m^2}\, j_\beta(x)\,P_\lambda(x)\,\mathfrak{F}^\lambda\,G_{\beta\alpha}(x-x')\,V_{\alpha\beta\gamma}\,d_\gamma(x')\,d_\beta(x')\,d_\gamma(x')\,. \tag{3.36}$$

Für $\mathfrak{F}^\lambda$ und $P(x)$ siehe die Gleichungen (3.15).

Um nun (3.35) exakt zu lösen, müßte man den Operator $(I-K)$ invertieren. Formal könnte man das zwar tun, doch zur Auswertung bräuchte man dann die genauen Randbedingungen des Operators $(I-K)^{-1}$. Man geht daher einen anderen Weg und iteriert die Gleichung durch eine Neumann-Reihe /16/. Dann lauten die Lösunggen von (3.35):

$$|\Phi(j,a)\rangle = \sum_{\nu=0}^{\infty} K^\nu\,|\Phi^c(j,a)\rangle \tag{3.37}$$

Aus (3.37) kann man nun das Zustandsfunktional in jeder Näherung ausrechnen. Es ist natürlich klar, daß die Reihe den Zustand $|\Phi(j,a)\rangle$ nur in ihrem Konvergenzbereich darstellt. Wir wollen hier und im weiteren annehmen, daß dieser nicht leer ist.

3.5. Funktionale Eigenwertgleichung und die S-Matrix

Zur Berechnung der S-Matrix ist es vorteilhaft, die Gleichung (3.31) des Spinorfeldes in eine Eigenwertgleichung (Lippmann-Schwinger-Gleichung) umzuschreiben. Der Vorteil liegt darin, daß dann die Energieerhaltung explizit in dem Ausdruck der S-Matrix erscheint.

Wir schreiben für (3.31)

$$D_{\alpha\gamma}\,\partial_\gamma(x)\,|\Phi(j,a)\rangle = H'\,|\Phi(j,a)\rangle$$

mit

$$H' =: g_0\, V_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\alpha_\beta(x)\,\alpha_\gamma(x)\,\alpha_\eta(x)\,.$$

Der Differentialoperator $D_{\alpha\gamma}$ läßt sich schreiben als

$$\begin{aligned} D_{\alpha\gamma} = {} & i\,M^{\mu\nu\lambda}_{\alpha\gamma}\,\partial_\mu\partial_\nu\partial_\lambda - \\ & -(2\mu+\varkappa)\,N^{\mu\nu}_{\alpha\gamma}\,\partial_\mu\partial_\nu - \\ & -(2\mu\varkappa+\mu^2)(i\,\Gamma^\mu_{\alpha\gamma})\,\partial_\mu + \mu^2\varkappa\,\delta_{\alpha\gamma} \end{aligned} \tag{3.38}$$

mit

$$M^{\mu\nu\lambda}_{\alpha\gamma} := \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\,\Gamma^\nu_{\beta\delta}\,\Gamma^\lambda_{\delta\gamma} \quad ; \quad N^{\mu\nu}_{\alpha\gamma} := \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\,\Gamma^\nu_{\beta\gamma}\,.$$

Für die Funktionalgleichung kann dann geschrieben werden:

$$\left[(2\mu\varkappa+\mu^2)(-i\,\Gamma^\mu_{\alpha\gamma})\,\partial_\mu + K'\right]\partial_\gamma(x)\,|\Phi(j,a)\rangle = H'\,|\Phi(j,a)\rangle \tag{3.39}$$

mit

$$K' := i\,M^{\mu\nu\lambda}_{\alpha\gamma}\,\partial_\mu\partial_\nu\partial_\lambda - (2\mu+\varkappa)\,N^{\mu\nu}_{\alpha\gamma}\,\partial_\mu\partial_\nu + \mu^2\varkappa\,\delta_{\alpha\gamma}$$

Multipliziert man (3.39) mit $j_\alpha(x)$, summiert über α und integriert schließlich über x , so erhält man mit den funktionalen Symmetrierelationen (3.15) und in dem Lorentz-System $\mathfrak{z}^r := (E,0,0,0)$ die Gleichung

$$E_a |\Phi(j,a)\rangle = (K + H_1)|\Phi(j,a)\rangle . \tag{3.40}$$

Dabei sind

$$E_a := (\mu\varkappa + \mu^2) E$$

$$H_1 := -\sum_\alpha \int dx\, j_\alpha(x)\, H'$$

$$K := \sum_\alpha \int dx\, j_\alpha(x)\, K' .$$

Aus dieser Gleichung kann man in üblicher Weise formal eine Lippmann-Schwinger-Gleichung ableiten /29/. Man erhält

$$H = K + H_1$$

$$|\Phi(j,a)\rangle^+ = |\Phi_a^\circ\rangle + \lim_{\eta\to 0} \frac{1}{E_a - H + i\eta}\, H_1 |\Phi_a^\circ\rangle$$

$$|\Phi(j,a)\rangle^- = |\Phi_a^\circ\rangle + \lim_{\eta\to 0} \frac{1}{E_a - H + i\eta}\, H_1 |\Phi_a^\circ\rangle$$

oder

$$|\Phi(j,a)\rangle^\pm = (1 + G^\pm H_1)|\Phi_a^\circ\rangle , \tag{3.41}$$

wobei $G^{\pm}$ die avancierte bzw. retardierte Greenfunktion bedeutet. Definiert man die S-Matrix als

$$S_{aa'} := \langle \Phi(j,a) \mid \Phi(j,a') \rangle^{+} ,$$

so erhält man

$$S_{aa'} = \delta_{aa'} + 2\pi i\, \delta(E_a - E_{a'}) \langle \Phi^{0}(j,a) \mid H_1 \Phi(j,a') \rangle^{+}$$

$$:= \delta_{aa'} + R_{aa'} . \qquad (3.42)$$

$R_{aa'}$, die R-Matrix, hat mit der T-Matrix die Beziehung

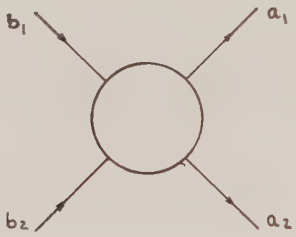
$$R_{aa'} = -(2\pi)^4 i\, \delta(k_a - k_{a'})\, T_{aa'} , \qquad (3.43)$$

wobei k_a und $k_{a'}$ die Viererimpulse sind.

IV. Zweiteilchen Streuquerschnitte

4.1. Einführung des Wirkungsquerschnitts

Nach /**33**/ ist der Wirkungsquerschnitt für den folgenden Prozeß



gegeben als

$$\sigma_{ab} = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(k-k') \, |T_{ab}|^2}{\varrho_{b_1} \varrho_{b_2} |\hat{v}_{b_1} - \hat{v}_{b_2}|} \cdot \frac{1}{\varrho_{a_1} \varrho_{a_2}} \tag{4.1}$$

Hierbei sind ϱ_{b_i} bzw. ϱ_{a_i} die Teilchendichten der einlaufenden bzw. der auslaufenden Teilchen und $\hat{v}_{b_1} - \hat{v}_{b_2}$ die Relativgeschwindigkeit der einlaufenden Teilchen bezogen auf den Normalenvektor n . Es gilt

$$k = k_1 + k_2 \quad ; \quad k' = k'_1 + k'_2 \; ,$$

$$n := \frac{k}{(k^2)^{1/2}} \; .$$

Den differentiellen Wirkungsquerschnitt für zwei auslaufende Teilchen, deren Impulse im Intervall d^3k_i um k_i liegen, erhalten wir aus (4.1) durch Multiplikation mit $\prod_{i=1}^{2} (2\pi)^{-3} d^3k_i$ zu:

$$d\sigma_{ab} = \frac{(2\pi)^4\,\delta(k-k')\,|T_{ab}|^2}{\varrho_{b_1}\varrho_{b_2}\,|\hat{v}_{b_1}-\hat{v}_{b_2}|\,\varrho_{a_1}\varrho_{a_2}} \cdot \frac{d^3k_1\,d^3k_2}{(2\pi)^6} \,. \tag{4.2}$$

Der Faktor $(2\pi)^{-6}$ stammt von der Normierung. Den totalen Wirkungsquerschnitt erhält man, indem (4.2) über die auslaufenden Impulse integriert wird. Für die feldtheoretischen Dichten der freien Teilchen setzen wir dabei /34/:

$$\varrho_{a_i} = \frac{(n k_i)}{(2\pi)^3} \quad ; \quad \varrho_{b_i} = \frac{(n\cdot k_i')}{(2\pi)^3} \qquad (i=1,2) \tag{4.3}$$

n ist dabei der Normalenvektor.

Man erhält dann für den totalen Wirkungsquerschnitt σ_{total} das Integral

$$\sigma_{tot} = (2\pi)^{10} \int \frac{d^3k_1}{(n k_1)} \cdot \frac{d^3k_2}{(n k_2)} \cdot \frac{\delta(k-k')\,|T_{ab}|^2}{(n k_1')(n k_2')\,|\hat{v}_{b_1}-\hat{v}_{b_2}|} \tag{4.4}$$

Bei der Berechnung des Integrals (4.4) wählt man das bei den Streuexperimenten der Hochenergiephysik übliche Schwerpunktsystem. Dieses System ist definiert durch

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_1' + \vec{k}_2' = 0 \,. \tag{4.5}$$

Aus der Viererimpulserhaltung folgt dann, daß

$$|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = |\vec{k}_1'| = |\vec{k}_2'| \,,$$

$$k_{10} = k_{20} = k_{10}' = k_{20}'$$

gelten.

Weiterhin führt man die Mandelstamvariablen ein, die allgemein durch die Relationen

$$s := (k_1 + k_2)^2 = (k_1' + k_2')^2$$

$$t := (k_1 - k_1')^2 = (k_2 - k_2')^2 \qquad (4.6)$$

$$u := (k_1 - k_2')^2 = (k_2 - k_1')^2$$

mit

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_1'^2 + m_2'^2$$

definiert sind.

Mit (4.5) und (4.6) kann das Integral (4.4) dargestellt werden als /34/

$$\sigma_{tot.}(ab) = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{d\sigma(s,t)}{dt},$$

wobei

$$\frac{d\sigma(s,t)}{dt} := 2 \cdot (2\pi)^{11} \cdot \frac{\theta(\sqrt{s} - \sqrt{k_1^2} - \sqrt{k_2}) \, |T_{ab}|^2}{(s - k_1'^2 - k_2'^2)^2 - 4 k_1'^2 k_2'^2} \qquad (4.7)$$

ist und für die Grenzen

$$t_{1,2} = -\frac{1}{2s} \Big[s^2 - s(k_1^2 + k_2^2 + k_1'^2 + k_2'^2) + (k_1^2 - k_2^2)(k_1'^2 - k_2'^2)$$

$$\pm \sqrt{(s - k_1^2 - k_2^2)^2 - 4 k_1^2 k_2^2} \cdot \sqrt{(s - k_1'^2 - k_2'^2)^2 - 4 k_1'^2 k_2'^2} \Big]$$

gilt.

Im Falle von Teilchen gleicher Masse gilt

$$k_1^2 = k_2^2 = k_1'^2 = k_2'^2 = \varkappa^2$$

$$s + t + u = 4\varkappa^2 ;$$

damit folgt

$$\sigma_{tot}(a,b) = \int_{4\varkappa^2 - s}^{0} dt \; \frac{d\sigma(s,t)}{dt} \tag{4.8}$$

mit

$$\frac{d\sigma(s,t)}{dt} = 2\cdot(2\pi)^{11} \cdot \frac{\theta(\sqrt{s} - 2\varkappa) \; |T_{ab}|^2}{s(s - 4\varkappa^2)} .$$

T_{ab} soll nun im folgenden berechnet werden.

4.2. Die T-Matrix in der ersten Näherung

Die S-Matrix lautet nach (3.42)

$$S_{ab} = \delta_{ab} + 2\pi i \; \delta(k^0 - k'^0) \; \langle \Phi^c(j,a) | H_1 \Phi(j,b) \rangle . \tag{3.42}$$

Der Satz der Quantenzahlen $b := (b_1, b_2)$ bzw. $a := (a_1, a_2)$ beschreibt die ein- bzw. auslaufende Zweiteilchenstreukonfiguration mit den Impulsen (k_1', k_2') bzw. (k_1, k_2) . Den Zustand $|\Phi(j,b)\rangle$ erhält man aus der dynamischen Gleichung des betrachteten Problems. Für den hier zu untersuchenden Fall des nichtlinearen Spinorfeldes wurde er in Abschnitt 3.4 durch die Neumann-Reihe (3.37) angenähert.

Setzt man diese Reihe in (3.42) ein, so hat man eine Reihe, aus der die S-Matrix im Prinzip in jeder beliebigen Näherung berechnet werden könnte. Diese Reihe lautet also

$$R_{ab} := 2\pi i\,\delta(k^\circ - k'^\circ)\,\langle \Phi^c(j,a)\,|\,H_1\,\Phi(j,b)\rangle \qquad (4.9)$$

$$= 2\pi i\,\delta(k^\circ - k'^\circ)\left[\langle \Phi^c(j,a)\,|\,H_1\,\Phi^c(j,b)\rangle + \langle \Phi^c(j,a)\,|\,H_1 K\,\Phi^c(j,b)\rangle + \cdots\right]$$

mit

$$k^\circ = k_1^\circ + k_2^\circ \quad ; \quad k'^\circ = k'^\circ_1 + k'^\circ_2 .$$

Wir wollen hier zuerst nur den ersten Term betrachten. Dieser Term entspricht der Born'schen Näherung und lautet:

$$R_{ab} = 2\pi i\,\delta(k^\circ - k'^\circ)\,\langle \Phi^c(j,a)\,|\,H_1\,\Phi^c(j,b)\rangle = \qquad (4.10)$$

$$=: 2\pi i\,\delta(k^\circ - k'^\circ)\,\langle \Phi^c(j,a)\,|\,\Phi^{(\omega)}(j,a)\rangle .$$

Setzen wir für das Produkt $\langle \Phi^c(j,a)|\ \Phi^{(\omega)}(j,b)\rangle$ nach unserer Vorschrift für das Skalarprodukt aus Abschnitt 3.3 ein, so kann (4.10) als

$$R^*_{ab} = -2\pi i\,\delta(k^\circ - k'^\circ)\,(2\pi)^{-8} \int dq_1\,dq_2\,\overline{\sigma_2^c\left(\begin{matrix} q_1 & q_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{matrix}\middle| b\right)}\,\varphi_2^{(1)}(q_1 q_2 | a) \qquad (4.11)$$

geschrieben werden. σ_2^c ist die freie σ-Funktion für "Zweiteilchencluster", die in Anhang IV ausgerechnet worden ist. $\varphi_2^{(1)}(q_1 q_2 | a)$ ist in Anhang V berechnet worden. Setzen wir

(A.5.8) und σ_2^c aus dem Anhang IV in (4.11) ein, so erhalten wir für das Integral:

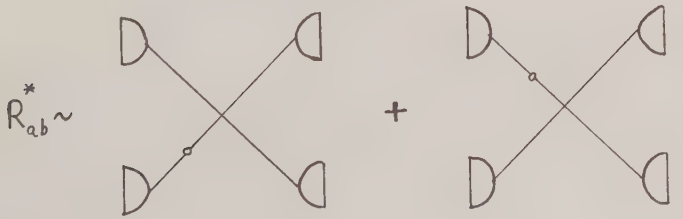
$$I_1 := -(2\pi)^{-8} \int dq_1\, dq_2\, \sigma_2^c \left(\begin{matrix} q_1 & q_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{matrix} \middle| b \right) \varphi_2^{(1)}(q_1 q_2 | a) = \tag{4.12}$$

$$= -(2\pi)^2 \frac{g_0}{2} \int dq_1\, dq_2\, \delta(q_1 + q_2 - k_1 - k_2)\, f_u(q_1^0)\, f_u(q_2^0) \cdot$$

$$\cdot \sum_{\lambda_1 \lambda_2} (-)^p \delta(\vec{q}_1 - \vec{k}_1')\, \delta(\vec{q}_2 - \vec{k}_2')\, \overline{\sigma_{\alpha_1}^c(\vec{k}_{\lambda_1}')}\, \overline{\sigma_{\alpha_2}^c(\vec{k}_{\lambda_2})}$$

$$\cdot \left[\hat{V}_{\alpha_1 \beta \gamma \delta}\, \tilde{F}_{\beta \alpha_2}(-q_2) - \hat{V}_{\alpha_2 \beta \gamma \delta}\, \tilde{F}_{\beta \alpha_1}(-q_1) \right] \varphi_\delta^c(\vec{k}_1')\, \varphi_\gamma^c(\vec{k}_2) .$$

Mit den graphischen Symbolen aus Anhang V kann (4.12) folgendermaßen dargestellt werden:



I_1 ist in Anhang VI für NN-Streuung berechnet worden. Damit folgt für R^* :

$$R^{*}_{ab} = \frac{i(2\pi)^4 2 g_0 \delta(k'-k)}{(2\pi)^6 (\mu^2 - x^2)^2} (V_{s_2\sigma_2 V_{s_4 s_3}}) \, u_{s_4}(\vec{k}_1) \, u_{s_3}(\vec{k}_2)$$

$$\cdot \bar{u}_{\sigma_1}(\vec{k}_1') \, \bar{u}_{\sigma_2}(\vec{k}_2') \, f_u(k^0 - \omega_1) \Big[(k_1' + \mu)^2 (k_1' + x) \Big]_{\sigma_1 s_2}.$$

Mit der Relation

$$R^{*}_{ab} = (2\pi)^4 i \, \delta(k'-k) \quad T^{*}_{ab}$$

folgt dann für die T-Matrix:

$$T^{*}_{ab} = \frac{2 \cdot g_0}{(2\pi)^6 (\mu^2 - x^2)^2} \, \bar{u}_{\sigma_1}(\vec{k}_1') \, \bar{u}_{\sigma_2}(\vec{k}_2') \, u_{s_4}(\vec{k}_1) \, u_{s_3}(\vec{k}_2) \qquad (4.13)$$

$$f_u(k^0 - \omega_1) \Big[(k_1' + \mu)^2 (k_1' + x) \Big]_{\sigma_1 s_2} (V_{s_2\sigma_2} V_{s_4 s_3})$$

mit

$$\omega_1 := (x^2 + \vec{k}_1'^2)^{1/2}.$$

Mit der Beziehung

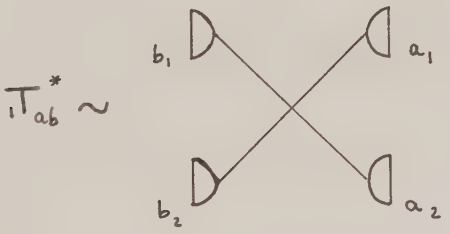
$$\frac{\bar{u}^s(\vec{k})(k + m)}{2m} = \bar{u}^s(\vec{k}) \qquad (4.14)$$

für die Dirac-Spinoren /16/ ergibt sich aus (4.13)

$$ {}_1T^*_{ab} = g_0 \frac{4\pi}{(2\pi)^6 (\mu^2 - x^2)^2} \bar{u}_{\sigma_1}(\vec{k}'_1)\, \bar{u}_{\sigma_2}(\vec{k}'_2)\, u_{s_4}(\vec{k}_1)\, u_{s_3}(\vec{k}_2) $$

$$ \cdot f_4(k^\circ - \omega_1) \left[(k'_1 + p)^2 \right]_{\sigma_1 s_2} (V_{s_2 \sigma_2 V_{s_4 s_3}}) \,. \qquad (4.15) $$

Im Graphen ist das



4.3. Berechnung des elastischen, unpolarisierten Wirkungsquerschnittes in erster Näherung

Nach Abschnitt (4.1) benötigen wir zur Berechnung von Wirkungsquerschnitten das Betragsquadrat der T-Matrixelemente. Im allgemeinen betrachtet man den Wirkungsquerschnitt ohne Polarisationseffekte, da man keine Informationen über Polarisation hat. Man muß daher bei $|T_{ab}|^2$ über die Anfangsspins mitteln und über die Endspins summieren. Das bedeutet, daß man den verschiedenen Anfangspolarisationsrichtungen a priori gleiche Wahrscheinlichkeit zuschreibt. Wir haben also den Ausdruck

$$|_1T_{ab}|^2 = \frac{1}{4}\sum_{s_1 s_2}\sum_{s_1' s_2'} |T^* T| = \tag{4.16}$$

$$= \frac{1}{4} g_0^2 \frac{16\varkappa^2}{(2\pi)^{12}(\mu^2-\varkappa^2)^4} \left(f_4(k^0-\omega_1)\right)^2 \bar{u}_{\sigma_1}(\vec{k}_1') \bar{u}_{\sigma_2}(\vec{k}_2') u_{s_4}(\vec{k}_1) u_{s_3}(\vec{k}_2) \cdot$$

$$\cdot \bar{u}_{s_3'}(\vec{k}_2) \bar{u}_{s_4'}(\vec{k}_1) u_{\sigma_2'}(\vec{k}_2') u_{\sigma_1'}(\vec{k}_1') \left((k_1'+\mu)^2\right)_{\sigma_1 s_2} \left((k_1'+\mu)^2\right)_{s_2'\sigma_1'} \cdot$$

$$\cdot \left(V_{s_2\sigma_2} V_{s_4 s_3}\right)\left(\overline{V_{s_2'\sigma_2'} V_{s_4' s_3'}}\right).$$

Mit der Beziehung /31/

$$\sum_s u_\alpha^s(\vec{k}) \bar{u}_\beta^s(\vec{k}) = \frac{1}{2m}(k+m)_{\alpha\beta} \tag{4.17}$$

erhält man für $|T|^2$:

$$|_1T_{ab}^{neu}|^2 = g_0^2 \frac{4\varkappa^2}{(2\pi)^{12}(\mu^2-\varkappa^2)^4} \left(f_4(k^0-\omega_1)\right)^2 \left(\frac{1}{2\varkappa}\right)^4. \tag{4.18}$$

$$\cdot (k_2+\varkappa)_{s_3 s_3'} (k_1+\varkappa)_{s_4 s_4'} (k_2'+\varkappa)_{\sigma_2'\sigma_2} (k_1'+\varkappa)_{\sigma_1'\sigma_1} \cdot$$

$$\cdot (k_1'+\mu)^2_{\sigma_1 s_2} (k_1'+\mu)^2_{s_2'\sigma_1'} \left(V_{s_2\sigma_2} V_{s_4 s_3}\right)\left(\overline{V_{s_2'\sigma_2'} V_{s_4' s_3'}}\right).$$

Setzen wir nach /34/ für den Vertex

$$(V_{\alpha\beta}V_{\gamma\delta}) = \frac{\ell^2}{2}\left(C_{\alpha\beta}C_{\gamma\delta} + (\gamma_5 C)_{\alpha\beta}(\gamma_5 C)_{\gamma\delta}\right) = \overline{(V_{\alpha\beta}V_{\gamma\delta})}$$

ein, so erhalten wir

$$|{}_1T_{ab}^{\text{imp.}}|^2 = \frac{2^{-6}}{(2\pi)^{12}}\cdot\frac{4\cdot g_0'^2}{\varkappa^2(\mu^2-\varkappa^2)^4}\cdot\left(f_u(k^0-\omega_1)\right)^2 \tag{4.19}$$

$$\Big[\,Sp(k_1+\varkappa)(k_2-\varkappa)\cdot Sp(k_1'+\varkappa)(k_1'+\mu)^2(k_2'-\varkappa)(k_1'+\mu)^2$$

$$+\,Sp(k_1+\varkappa)(k_2+\varkappa)\cdot Sp(k_1'+\varkappa)(k_1'+\mu)^2(k_2'+\varkappa)(k_1'+\mu)^2\Big]$$

mit

$$g_0' = g_0\ell^2,$$

der dimensionslosen Kopplungskonstanten.

Nach der Spurbildung bei den γ^μ-Matrizen ergibt sich dann:

$$|{}_1T_{ab}^{\text{imp.}}|^2 = \frac{2\cdot g_0'^2}{(2\pi)^{12}\varkappa^2(\mu^2-\varkappa^2)^4}\cdot\left(f_u(k^0-\omega_1)\right)^2\cdot$$

$$\cdot(\varkappa+\mu)^4\Big[(k_1k_2)(k_1'k_2') + \varkappa^4\Big] \tag{4.20}$$

Führen wir noch die Mandelstamvariablen (4.6) ein, so lautet (4.20) im CM-System wegen

$$f_u(k^0-\omega_1) = \omega_1:$$

$$|T_{ab}^{imp.}|^2 = \frac{2 g_0'^2}{(2\pi)^{12} \cdot 16 \cdot x^2 (\mu - x)^4} \cdot s \cdot$$

$$\cdot \left[(s-2x^2)^2 + 4x^4 \right] . \qquad (4.21)$$

Nach (4.8) kann nun der totale Wirkungsquerschnitt berechnet werden. Dabei muß man beachten, daß im Falle von zwei identischen auslaufenden Teilchen nur über den halben Phasenraum zu integrieren ist, um die Teilchen nicht doppelt zu zählen /31/. Man erhält dann:

$$\sigma_{elast.}^{imp.}(a,b) = \int_{4x^2-s}^{0} dt \, \frac{d\sigma(s,t)}{dt} \qquad (4.22)$$

mit

$$\frac{d\sigma(s,t)}{dt} = (2\pi)^{11} \frac{\theta(\sqrt{s} - 2x)}{s(s-4x^2)} \cdot \frac{2 g_0'^2}{(2\pi)^{12} \cdot x^2 \cdot 16 \cdot (\mu - x)^4} \cdot$$

$$\cdot s \cdot \left[(s-2x^2)^2 + 4x^4 \right] . \qquad (4.23)$$

Integriert ergibt das:

$$\sigma_{elast.}^{imp.}(a,b) = \theta(\sqrt{s} - 2x) \cdot \left(\frac{g_0'}{2\pi} \right)^2 \cdot$$

$$\frac{4\pi}{16 \cdot x^2 (\mu - x)^4} \cdot \left[(s-2x^2)^2 + 4x^4 \right] \qquad (4.24)$$

An der Schwelle $s = 4 \cdot \varkappa^2$ ergibt sich für den totalen, elastischen unpolarisierten Zweiteilchenstreuquerschnitt in der ersten Näherung:

$$\sigma^{unp.}_{elast.}(s=4\varkappa^2) = \left(\frac{g_0'}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{2\pi\varkappa^2}{(\mu-\varkappa)^4} \qquad (4.25)$$

Die Kopplungskonstante ist in der nichtlinearen Spinortheorie kein freier Parameter. Sie wird durch die Forderung festgelegt, daß der charakteristische Pol $P^2 - \varkappa^2 = 0$ in der Zweipunktfunktion mit dem Eigenwert übereinstimmt, der sich aus der Fermioneneigenwertgleichung ergibt. Dann gilt für $g_0'/2\pi \approx 1/2$. Damit erhält man dann für $\varkappa \approx 0.94$ GeV aus (4.25):

$$\mu = 0 : \quad \sigma(s=4\varkappa^2) \sim 7.10 \ (GeV)^{-2}$$

$$\mu = 1 : \quad \sigma(s=4\varkappa^2) \sim 4 \cdot 10^6 \ (GeV)^{-2}.$$

4.4. Die T-Matrix in der zweiten Näherung

Die zweite Näherung in der Störungsreihe erlaubt es, genauere Aussagen über die analytischen Eigenschaften der Streuamplitude zu machen. Hier werden wir aber nicht die Beiträge aller Graphen berücksichtigen. Wir wollen vielmehr die S-Matrix der Spinortheorie, die hier ausgerechnet wird, mit der S-Matrix der skalaren Theorie, die in /15/ errechnet wurde, vergleichen, Wir werden daher nur Beiträge solcher Graphen berücksichtigen, die auch dort betrachtet wurden.

Nach (4.9) ist die R-Matrix in der zweiten Näherung durch den Ausdruck

$$R_{ab} = 2\pi i\,\delta(k_0 - k_0')\,\langle \Phi^c(j,a) \mid H_1 K\, \Phi^c(j,a)\rangle$$

$$:= 2\pi i\,\delta(k_0 - k_0')\,\langle \Phi^c(j,a) \mid \Phi_2'(j,a)\rangle \qquad (4.26)$$

gegeben. Dabei charakterisieren die Quantenzahlen $b := (b_1, b_2)$ bzw. $a := (a_1, a_2)$ wie bei den vorherigen Rechnungen die ein- bzw. auslaufenden Zweiteilchenstreukonfigurationen, denen die Impulse (k_1', k_2') bzw. (k_1, k_2) zugeordnet werden.

Das Skalarprodukt der Zustände kann wie in der ersten Näherung nach der Vorschrift in Abschnitt 3.3 ausgedrückt werden. Es lautet dann:

$$R_{ab}^{*} = -2\pi i\,\delta(k_0 - k_0')\cdot \qquad (4.27)$$

$$\cdot (2\pi)^{-8} \int dq_1\, dq_2\; \overline{\sigma_2^c}(q_1 q_2 \mid b)\, \varphi_2'(q_1 q_2 \mid a)\,.$$

σ_2^c ist aus (4.2) bekannt und $\varphi_2'(q_1 q_2 \mid a)$ ist im Anhang V ausgerechnet worden. Für den hier verfolgten Zweck ist es ausreichend, nur den Teil von φ_2' zu betrachten, der dem Feynmangraph

entspricht. Wie man aus Anhang V ersehen kann, existieren zu diesem Graph, außer dem Selbstenergiegraph, noch zwei inäquivalente Graphen. Mit diesem Graphen erhält man aus (4.27) dann die T-Matrix in Abhängigkeit von s und t. Der hier betrachtete Graph hängt nur von s ab. Das ermöglicht uns, unsere T-Matrix mit der in /15/ errechneten für den skalaren Fall zu vergleichen, und nicht mehr. Um mehr über das Verhalten der T-Matrix bzw. des Streuquer-

schnitts aussagen zu können, müßte man natürlich die Beiträge von allen möglichen Graphen berücksichtigen. In unserem Fall stellt dies keine prinzipielle Schwierigkeit dar. Allerdings können die Integrale, die bei der Berechnung des Wirkungsquerschnittes auftreten, nicht geschlossen angegeben werden. Sie müssen vielmehr numerisch berechnet werden.

Man erhält also für das Integral:

$$I_2 := -(2\pi)^{-8} \cdot \int dq_1\, dq_2\, \overline{\sigma_2^c}(q_1 q_2 | b)\, \varphi_2'(q_1 q_2 | a) = \tag{4.28}$$

$$= -\frac{(2\pi)^2 g_0^2}{2\varkappa^2} \int dq_1\, dq_2\, dq\, f_u(q_1^0)\, f_u(q_2^0)\, \delta(q_1 + q_2 - k_1 - k_2) \cdot$$

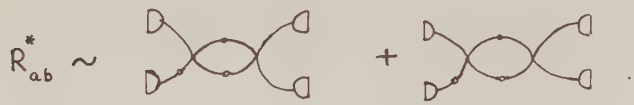
$$\cdot \sum_{\lambda_1 \lambda_2} (-)^{\rho}\, \delta^3(\vec{q}_1 - \vec{k}'_{\lambda_1})\, \delta^3(\vec{q}_2 - \vec{k}'_{\lambda_2})\, \sigma_{\alpha_1}^c(\vec{k}'_{\lambda_1})\, \sigma_{\alpha_2}^c(\vec{k}'_{\lambda_2}) \cdot$$

$$\cdot \Big[\tilde{V}_{\alpha_1 \beta_1 \beta_2 \beta_3}(q^\mu q_\mu)\, \tilde{G}_{\beta_2 \alpha}(q)\, \hat{V}_{\alpha \beta \gamma \delta}\, \tilde{F}_{\beta \beta_3}(q - k_1 - k_2)\, \tilde{F}_{\beta_1 \alpha_2}(-q_2)$$

$$- \tilde{V}_{\alpha_2 \beta_1 \beta_2 \beta_3}(q^\mu q_\mu)\, \tilde{G}_{\beta_2 \alpha}(q)\, \hat{V}_{\alpha \beta \gamma \delta}\, \tilde{F}_{\beta \beta_3}(q - k_1 - k_2)\, \tilde{F}_{\beta_1 \alpha_1}(-q_1) \Big] \cdot$$

$$\cdot \varphi_\delta^c(\vec{k}_1)\, \varphi_\gamma^c(\vec{k}_2).$$

Die graphische Darstellung der Gleichung (4.28) lautet:



I_2 wird im Anhang VI speziell für NN-Streuung berechnet. Mit (A.6.44) ergibt sich dann für die R-Matrix:

$$R^*_{ab} = -(2\pi)^4 i\,\delta(k'-k)\cdot \frac{g_0^2\, 4\cdot\mu^2 (\varkappa+\mu)^2 (\gamma_\mu k'^\mu)}{\varkappa^2 (2\pi)^8 (\mu^2-\varkappa^2)^5}\cdot f_\mu(k^\circ-\omega_1)\cdot$$

$$\cdot u_{\sigma_4}(\vec{k}_1)\, u_{\sigma_3}(\vec{k}_2)\, \bar{u}_{\sigma_1}(\vec{k}_1')\, \bar{u}_{\sigma_2}(\vec{k}_2') \left((\not{k}_1'+\varkappa)(\not{k}_1'+\mu)^2\right)_{\sigma_1\sigma}\cdot$$

$$\cdot (V_{\sigma_2\sigma} V_{\sigma_5\sigma_6})(V_{\sigma_1\sigma_2} V_{\sigma_3\sigma_4})\, M_{\sigma_5\sigma_1\sigma_6\sigma_2} \qquad (4.29)$$

mit

$$M_{\alpha\beta\gamma\delta} := \mathbb{1}_{\alpha\beta}\,\mathbb{1}_{\gamma\delta}\cdot A + \mathbb{1}_{\alpha\beta}\,\not{k}_{\gamma\delta}\cdot\mu\cdot B.$$

A und B aus dem Anhang VI.

Durch Vergleich mit der Relation

$$R^*_{ab} = (2\pi)^4 i\,\delta(k'-k)\; T^*_{ab}$$

erhält man für die T-Matrix:

$$ {}_2T^*_{ab} = \frac{g_0^2\, 4\,\mu^2(\varkappa+\mu)^2(\gamma_\mu k'^\mu)}{(2\pi)^8\,\varkappa^2(\mu^2-\varkappa^2)^5}\cdot f_u(k^\circ-\omega_1)\,((\not k_1'+\varkappa)(\not k_1'+\mu)^2)_{\sigma_1 s}\cdot $$

$$ \cdot\,\bar u_{\sigma_1}(\vec{k}_1')\,\bar u_{\sigma_2}(\vec{k}_2')\,u_{s_4}(\vec{k}_1)\,u_{s_3}(\vec{k}_2)\cdot $$

$$ \cdot(V_{\sigma_2 s}V_{s_5 s_6})(V_{s_1 s_2}V_{s_3 s_4})\,M_{s_5 s_1 s_6 s_2}\,. \qquad (4.30) $$

Berücksichtigt man noch die Relation (4.14), so folgt zusammen mit (4.15) für die T-Matrix in dieser Näherung

$$ T^* := {}_1T^*_{ab} + {}_2T^*_{ab} = \qquad (4.31) $$

$$ = \frac{4\,g_0\varkappa}{(2\pi)^6(\mu^2-\varkappa^2)^2}\,\bar u_{\sigma_1}(\vec{k}_1')\,\bar u_{\sigma_2}(\vec{k}_2')\,u_{s_4}(\vec{k}_1)\,u_{s_3}(\vec{k}_2)\cdot $$

$$ \cdot f_u(k^\circ-\omega_1)\,((\not k_1'+\mu)^2)_{\sigma_1 s_2}\,(V_{s_2\sigma_2}V_{s_4 s_3}) - $$

$$ - \frac{g_0^2\,8\,\mu^2(\varkappa+\mu)^2(\gamma_\mu k'^\mu)}{\varkappa\,(2\pi)^8(\mu^2-\varkappa^2)^5}\cdot\bar u_{\sigma_1}(\vec{k}_1')\,\bar u_{\sigma_2}(\vec{k}_2')\,u_{s_4}(\vec{k}_1)\,u_{s_3}(\vec{k}_2)\cdot f_u(k^\circ-\omega_1)\cdot $$

$$ \cdot\,((\not k_1'+\mu)^2)_{\sigma_1 s}\,(V_{\sigma_1 s}V_{s_5 s_6})(V_{s_1 s_2}V_{s_3 s_4})\,M_{s_5 s_1 s_6 s_2}\,, $$

wobei

$$\omega_1 := (\varkappa^2 + \vec{k}_1^2)^{1/2}$$

ist.

4.5. Der Wirkungsquerschnitt

Mit der T-Matrix, die wir im letzten Abschnitt berechnet haben, können wir nun den elastischen, unpolarisierten Wirkungsquerschnitt berechnen. Dieser Wirkungsquerschnitt ist natürlich nicht der vollständige Wirkungsquerschnitt bis zu der zweiten Näherung in der Störungsreihe. Wie vorher erwähnt wurde, existieren noch andere nicht verschwindende Beiträge. Sie rühren von den zu dem hier betrachteten Graph inäquivalenten Feynmangraphen, die alle im Anhang V dargestellt worden sind. Für den Vergleich mit /15/ genügt es aber, allein diesen Term von der T-Matrix zu berücksichtigen.

Die Rechnung verläuft analog zu der ersten Näherung. Das Betragsquadrat der T-Matrix läßt sich wieder über die Spinmittlung berechnen und liefert:

$$|T_{ab}^{\text{unpol.}}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{s_1,s_2} \sum_{s_1',s_2'} |T_{ab}^* \, T_{ab}|, \tag{4.32}$$

wobei T_{ab} mit (4.31) gegeben ist.

Setzen wir für die Vertex-Funktion wie in der ersten Näherung

$$V_{\alpha\beta} V_{\gamma\delta} := \frac{\varrho^2}{2} \left(C_{\alpha\beta} C_{\gamma\delta} + (\gamma_5 C)_{\alpha\beta} \, (\gamma_5 C)_{\gamma\delta} \right) = \overline{V_{\alpha\beta} V_{\gamma\delta}}$$

ein, so erhalten wir nach längerer Rechnung:

$$|T_{ab}^{\mu\rho}|^2 = \Big[\Big(\frac{g_0 l^2}{2\pi}\Big)^2 \cdot \frac{1}{(2\pi)^{10} \cdot 16 \cdot \varkappa^2 (\mu^2 - \varkappa^2)^4} \tag{4.33}$$

$$+ \Big(\frac{g_0 l^2}{2\pi}\Big)^3 \cdot \frac{\mu^2 (\varkappa + P)^2}{\varkappa^2 (2\pi)^{11} (\mu^2 - \varkappa^2)^7} \cdot (A + \bar{A})$$

$$+ \Big(\frac{g_0 l^2}{2\pi}\Big)^4 \cdot \frac{\mu^4 (\varkappa + P)^4}{\varkappa^2 (2\pi)^{12} (\mu^2 - \varkappa^2)^{10}} \cdot A\bar{A} \Big] \; (f_n(k^0 - \omega_1))^2 \cdot M,$$

mit

$$M := Sp(k_1' + \varkappa)(k_2' + \varkappa) \cdot Sp(k_1' + \varkappa)(k_1' + P)^2 (k_2' + \varkappa)(k_1' + P)^2$$

$$+ Sp(k_1' + \varkappa)(k_2' - \varkappa)\, Sp(k_1' + \varkappa)(k_1' + P)^2 (k_2' - \varkappa)(k_1' + P)^2 .$$

Nach der Berechnung der Spuren der γ^μ-Matrizen erhält man dann im CM-System und mit Mandelstamvariablen:

$$|T_{ab}^{unp}|^2 = \Big[\Big(\frac{g_0 l^2}{2\pi}\Big)^2 \cdot \frac{2}{16\cdot(2\pi)^{10} x^2 (\mu - x)^4} \cdot S \tag{4.34}$$

$$+ \Big(\frac{g_0 l^2}{2\pi}\Big)^3 \cdot \frac{\mu^2 (x+\mu)^6}{(2\pi)^{11} (\mu^2 - x^2)^7 \cdot x^2} \cdot S\Big(S(B - B^{(1)}) + \frac{x^2}{2} B^{(2)} \Big)$$

$$+ \Big(\frac{g_0 l^2}{2\pi}\Big)^4 \cdot \frac{\mu^4 (x+\mu)^8}{2 \cdot x^2 (2\pi)^{12} (\mu^2 - x^2)^{10}} \cdot S\Big(S(B - B^{(1)}) + \frac{x^2}{2} B^{(2)}\Big)^2 \Big] \cdot$$

$$\cdot \Big((s - 2x^2)^2 + 4x^4 \Big),$$

mit B , $B^{(1)}$ und $B^{(2)}$ aus Anhang VI.

Der totale Streuquerschnitt kann nun nach (4.8) berechnet werden. Man muß wieder beachten, daß infolge von zwei identischen auslaufenden Teilchen nur über den halben Phasenraum zu integrieren ist. Es gilt dann wieder

$$\sigma_{elast.}^{unp}(a,b) = \int_{4x^2 - s}^{0} dt \, \frac{d\sigma(s,t)}{dt}$$

mit

$$\frac{d\sigma(s,t)}{dt} := (2\pi)^{11} \, \frac{\theta(\sqrt{s} - 2x)}{s(s - 4x^2)} \cdot |T_{ab}|^2 .$$

Damit erhalten wir für den Wirkungsquerschnitt im hier betrachteten Fall:

$$\tilde{\sigma}^{uup}_{elast.}(a,b) = \theta(\sqrt{s}-2\varkappa)\Bigg[\left(\frac{g_0 l^2}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{4\pi}{16\cdot\varkappa^2(\mu-\varkappa)^4} \tag{4.35}$$

$$+\left(\frac{g_0 l^2}{2\pi}\right)^3 \cdot \frac{\mu^2(\varkappa+\mu)^6}{(\mu^2-\varkappa^2)^7\cdot\varkappa^2} \cdot z(s)$$

$$+\left(\frac{g_0 l^2}{2\pi}\right)^4 \cdot \frac{\mu^4(\varkappa+\mu)^8}{4\pi\,\varkappa^2(\mu^2-\varkappa^2)^{10}} \cdot (z(s))^2\Bigg] \cdot$$

$$\cdot\Big[(s-2\varkappa^2)^2+4\varkappa^4\Big]$$

mit

$$z(s) := s(B-B^{(1)}) + \frac{\varkappa^2}{2}(B^{(2)}) \cdot$$

An der Schwelle $s = 4\varkappa^2$ erhält man dann aus (4.35):

$$\sigma^{\text{imp}}_{\text{elast.}}(s=4x^2) = \left(\frac{g_0 l^2}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{2\pi x^2}{(\mu-x)^4} + \left(\frac{g_0 l^2}{2\pi}\right)^3 \cdot \frac{8(x+\mu)^6 \cdot x^2\mu^2}{(\mu^2-x^2)^7} \cdot Z(x^2)$$

$$+ \left(\frac{g_0 l^2}{2\pi}\right)^4 \cdot \frac{8(x+\mu)^8 x^2\mu^4}{4\pi(\mu^2-x^2)^{10}} \cdot \left(Z(x^2)\right)^2 .$$

Berücksichtigt man auch noch die anderen Beiträge zur T-Matrix, so sind die Größen B, $B^{(1)}$ und $B^{(2)}$ von t abhängig. Die t-Integration kann dann nicht wie hier geschlossen angegeben werden. Dies ist dann aber auch der einzige Unterschied, den man zu dem hier behandelten Fall hat.

V. Schlußdiskussion

In diesem abschließenden Kapitel sollen die Ergebnisse der Arbeit zusammengefaßt werden. Wir betrachten nur die erste Näherung, um danach den Einfluß der betrachteten höheren Ordnung auf diese erste Näherung zu untersuchen.

a) Die erste Näherung:

Folgende Punkte können bei dieser Betrachtung festgestellt werden:

1. Der unpolarisierte, differentielle Wirkungsquerschnitt ist in dieser Näherung isotrop, d.h. er hängt nicht vom Streuwinkel ab.

2. Der totale unpolarisierte Wirkungsquerschnitt, der im Rahmen der funktionalen Quantentheorie des nichtlinearen Spinorfeldes mit den Kanalgleichungen und anderem Skalarprodukt errechnet worden ist, steigt mit s^3 an. In /34/ z.B. ergibt sich für den Wirkungsquerschnitt in Integralmittelung:

$$\sigma^{unp}_{elast}(a,b) = \varkappa^{-8}\theta(\sqrt{s}-2\varkappa)\cdot S\cdot\left[(S-2\varkappa^2)^2+4\varkappa^4\right]\cdot$$

   Demgegenüber steigt σ in der vorliegenden Arbeit mit s^2. Es wäre interessant, den Einfluß der Normierung von freien Zustandsfunktionalen, $f_n(q_o)$, in dieser Hinsicht genauer zu untersuchen.

3. Im Rahmen der Vierfermionen-Kopplungstheorie mit $(v-A)$-Kopplung ergibt sich für den elastischen totalen Wirkungsquerschnitt in der niedrigesten Ordnung (NN-Streuung) /31/:

$$\sigma^{unp}_{elast.}(s) \sim g_o^2\,\theta(\sqrt{s}-2\varkappa)\,\frac{1}{s}\cdot\left[(S-2\varkappa^2)^2+4\varkappa^4\right],$$

   wobei die Kopplungskonstante g_o^2 durch Anpassung des Wirkungsquerschnitts an den experimentellen Wert an der Schwelle festgelegt wird. Der Wirkungsquerschnitt der Spinortheorie, der

hier berechnet wurde, steigt also um den Faktor s stärker als derjenige der (V - A)-Kopplungstheorie an. Dieser Faktor stammt von der Normierungsfunktion $f_n(\vartheta^0)$ der freien Zustandsfunktionale.

4. Für den skalaren Fall wurde in /15/ die S-Matrix in der niedrigsten Näherung der Störungstheorie ohne die Benutzung der der funktionalen Quantentheorie ausgerechnet. Die dort benützten Methoden - die Feldgleichungen, Bildung des Skalarprodukts - stehen in vollkommener Analogie zu denjenigen der vorliegenden Arbeit. Es ist also interessant, die Ergebnisse hier und dort miteinander zu vergleichen. Dieser Vergleich ist natürlich nicht ganz richtig. Ein exakter Vergleich ist erst möglich, wenn /15/ für das Spinorfeld umgeschrieben ist, woran zur Zeit gearbeitet wird /17/. In /15/ ergibt sich für die T-Matrix in der ersten Näherung:

$$T = \frac{g}{4v^2} \quad \frac{24}{(m^2-p^2)^4} \cdot$$

Diese T-Matrix hängt nicht von s ab. Der totale unpolarisierte Wirkungsquerschnitt, der daraus folgt, verhält sich daher für große s wie $\frac{1}{s}$. Das liegt daran, daß der skalare Fall stärker regularisiert ist als der Spinorfall. Die Ergebnisse von /17/ werden zeigen, ob dies auch ohne die funktionale Quantentheorie der Fall ist.

b) Die "zweite" Näherung:

Wie schon erwähnt, wurden in dieser Arbeit nicht alle Graphen, die zur zweiten Näherung beitragen, berücksichtigt. Es wurde vielmehr nur ein Graph betrachtet, der dem isotropen Anteil des Wirkungsquerschnitts in der zweiten Näherung entspricht. Es gibt aber außer dem Selbstenergiegraph noch drei weitere zum hier betrachteten inäquivalente Graphen, die alle zur zweiten Näherung beitragen. Es ist also nicht möglich, genaue Aussagen über das Verhalten der S-Matrix bzw. des Wirkungsquerschnitts in der zweiten Ordnung zu machen. Vor allem ist es nicht möglich, über

die t-Abhängigkeit etwas auszusagen, was in der zweiten Näherung wichtig wäre. Wir wollen aber trotzdem den Einfluß dieses Terms auf die S-Matrix bzw. den Wirkungsquerschnitt etwas näher betrachten. Außerdem können wir unsere Ergebnisse mit denjenigen von /15/ vergleichen, weil dort auch nur dieser Term berücksichtigt wurde.

In Anhang VIII ist das Verhalten der Funktionen B , $B^{(1)}$ und $B^{(2)}$, die bei der Berechnung der T-Matrix auftreten, für große Energien angegeben worden. Danach verhalten sich diese Funktionen für große Energien wie $\frac{1}{s}$. Das führt dazu, daß sich durch die neu hinzugekommenen Terme am asymtotischen Verhalten des Wirkungsquerschnitts nichts ändert. Er steigt insgesamt wie s^2 an. Man kann natürlich hier eine genauere Aussage machen, wenn alle Graphen in dieser Näherung berücksichtigt werden. Der Vergleich mit /15/ zeigt wieder, daß der Skalarfall auch hier wegen der stärkeren Regularisierung ein besseres asympt. Verhalten aufzeigt. In diesem Fall konvergiert der Wirkungsquerschnitt für große Energien.

Herrn Professor Dr. H. Stumpf danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele nützliche Diskussionen. Allen Angehörigen der Hochenergiegruppe Prof. Stumpf danke ich für zahlreiche wertvolle Diskussionen.

Anhang I

1. Feldgleichungen

In Analogie zu /15/ gehen wir von der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}(x) := \bar{A}(x)(-i\not{\partial} + \mu)C(x) - \bar{C}(x)(-i\not{\partial} + \mu)A(x) \qquad (A.1.1)$$

$$+ \bar{A}(x)B(x) + \bar{B}(x)A(x) - \bar{B}(x)(-i\not{\partial} + \varkappa)B(x)$$

aus. $\bar{\psi}(x) := \psi^{+}(x)\gamma^{0}$

Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen folgt direkt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (-i\not{\partial} + \mu)A(x) &= 0 \\ (-i\not{\partial} + \varkappa)B(x) &= A(x) \qquad (A.1.2) \\ (-i\not{\partial} + \mu)C(x) &= B(x)\,, \end{aligned}$$

oder die dazu äquivalente Feldgleichung höherer Ordnung

$$(-i\not{\partial} + \varkappa)(-i\not{\partial} + \mu)^{2} C(x) = 0\,. \qquad (A.1.3)$$

(A.1.3) ist genau die Gleichung (2.2) des nichtlinearen Spinorfeldes.

Das System (A.1.2) und die Feldgleichung (A.1.3) sind für die Beschreibung des Problems vollkommen gleichwertig. In /15/ und /13/ sind Mesonenfelder, die den Feldgleichungen höherer Ordnung genügen, behandelt worden.

Nach der allgemeinen kanonischen Quantisierungsvorschrift erhält man für die Felder A, B und C :

$$\left\{A(x), \bar{C}(x')\right\}_{x_0 = x_0'} = \left\{B(x), \bar{B}(x')\right\}_{x_0 = x_0'} \tag{A.1.4}$$

$$= \left\{C(x), \bar{A}(x')\right\}_{x_0 = x_0'} = \gamma^0 \delta(\vec{x} - \vec{x}').$$

Alle anderen Vertauschungsrelationen (VR) verschwinden. Insbesondere gilt also

$$\left\{C(x), \bar{C}(x')\right\}_{x_0 = x_0'} = 0 \tag{A.1.5}$$

Das C-Feld, Ψ -Feld in 2.3, ist also nichtkanonisch quantisiert. Arbeitet man also mit (A.1.3), so hat man eine Feldgleichung mit einer nichtkanonischen Quantisierung.

Das Hinzufügen der Wechselwirkung, wie es in (2.7) gemacht wurde, bedeutet nur einen zusätzlichen Term in (A.1.1) und eine Inhomogenität in der ersten Gleichung des Systems (A.1.2), worauf wir hier nicht genauer eingehen wollen /15/17/.

2. Lösungen der Feldgleichungen

Wir geben zuerst die Lösungen des homogenen Systems

$$(-i\partial\!\!\!/ + \varkappa)\, C_0(x) = 0$$

$$(-i\partial\!\!\!/ + \mu)\, B_0(x) = 0$$

$$(-i\partial\!\!\!/ + \varkappa)\, A_0(x) = 0$$

an. Sie lassen sich sofort hinschreiben /18/:

$$A_0(x) = \frac{1}{V^{1/2}} \sum_{\vec{k},s} \left(\frac{\varkappa}{\omega_k(x)}\right)^{1/2} \left[a(\vec{k};s)\, u(\vec{k};s)\, e^{-ikx} + b^*(\vec{k};s)\, v(\vec{k};s)\, e^{ikx}\right]. \tag{A.1.6}$$

Entsprechende Ausdrücke hat man auch für die Felder B_o und C_o. $U(\vec{k};s)$ und $V(\vec{k};s)$ sind dabei die normalen Dirac-Spinoren /18/.

Die Lösungen des inhomogenen Systems (A.1.2) müssen aufgrund der Kopplung der Feldgleichungen Superpositionen der Felder A_o, B_o und C_o sein /13/15/.

Man findet

$$A_o(x) = A_o(x)$$

$$B(x) = B_o(x) - \frac{1}{\mu - \varkappa} \cdot A_o(x) \qquad \text{(A.1.7)}$$

$$C(x) = C_o(x) - \frac{1}{\mu - \varkappa} B_o(x) - \frac{1}{\mu(\mu - \varkappa)} (\lambda - x^\nu \partial_\nu) A_o(x).$$

λ ist dabei ein Parameter, der noch bestimmt werden soll.

Um die Vertauschungsrelationen (A.1.4) auch für beliebige Abstände angeben zu können, rechnet man vorher die Vertauschungsrelationen zwischen $a(\vec{k};s)$ und $b(\vec{k};s)$ aus. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Felder A_o, B_o und C_o die gleichen gleichzeitigen Vertauschungsrelationen erfüllen wie die Felder A, B und C /15/. Es ergibt dann:

$$\{a_1(\vec{k};s), a_3^*(\vec{k}';s')\} = \{b_3(\vec{k};s), b_1^*(\vec{k}';s')\} = \qquad \text{(A.1.8)}$$

$$\{a_2(\vec{k};s), a_2^*(\vec{k}';s')\} = \{b_2(\vec{k};s), b_2^*(\vec{k}';s')\} =$$

$$\{a_3(\vec{k};s), a_1^*(\vec{k}';s')\} = \{b_1(\vec{k};s), b_3^*(\vec{k}';s')\} = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\, \delta_{ss'},$$

während alle anderen (VR) verschwinden. Die Indizes 1, 2, 3 beziehen sich in (A.1.8) auf die Felder A_o, B_o und C_o. Mit Hilfe der Vertauschungsrelationen (A.1.8) findet man zuerst für die Felder A_o, B_o und C_o:

$$\left\{ A_0(x), \bar{C}_0(x') \right\} = \left\{ C_0(x), \bar{A}_0(x') \right\} = -i\, S(x-x'; \mu) \qquad \text{(A.1.9)}$$

$$\left\{ B_0(x), \bar{B}_0(x') \right\} = -i\, S(x-x'; \varkappa)$$

mit

$$S(x; m) := \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \varepsilon(k_0)\, \delta(k^2 - m^2)\, \frac{\not{k} + m}{m^2 - k^2}\, e^{-ikx}\, dk .$$

Alle anderen Kommutatoren verschwinden.

Mit (A.1.9) folgt dann aus (A.1.7) direkt:

$$\left\{ C(x), \bar{C}(x') \right\} = \frac{-i}{(\mu - \varkappa)^2}\, S(x-x'; \varkappa) + \qquad \text{(A.1.10)}$$

$$+ \frac{i}{\mu(\mu - \varkappa)} \left[2\lambda - (x^\nu \partial_\nu - x'^\nu \partial'_\nu) \right] \cdot S(x-x'; \mu)$$

$$\left\{ B(x), \bar{C}(x') \right\} = \left\{ C(x), \bar{B}(x') \right\} = \frac{i}{\mu - \varkappa} \left[S(x-x'; \mu) - S(x-x'; \varkappa) \right]$$

$$\left\{ A(x), C(x') \right\} = \left\{ C(x), A(x') \right\} = -i\, S(x-x'; \mu)$$

$$\left\{ A(x), \bar{A}(x') \right\} = \left\{ A(x), \bar{B}(x') \right\} = \left\{ B(x), \bar{A}(x') \right\} = 0 .$$

Da wir mit der Feldgleichung (A.1.3) arbeiten werden, wollen wir (A.1.10) näher untersuchen. Aus den Beziehungen

$$(x^\nu \partial_\nu + x'^\nu \partial'_\nu)\, S(x-x'; m) = (x^\nu \partial_\nu - x'^\nu \partial_\nu)\, S(x-x'; m)$$

und

$$x^\mu \partial_\mu S(x;m) = \left(m \frac{\partial}{\partial m} - 3 \right) S(x;m)$$

folgt dafür:

$$\left\{ C(x), \bar{C}(x') \right\} = \frac{-i}{(\mu - x)^2} \cdot S + \frac{i}{\mu(\mu - x)} \left[(2\lambda + 3) - \mu \frac{\partial}{\partial x} \right] \cdot S \,. \qquad \text{(A.1.11)}$$

Der Parameter λ wird aus der Forderung der nichtkanonischen Quantisierung von $C(x)$ bestimmt:

$$\left\{ C(x), \bar{C}(x') \right\}_{x_0 = x_0'} = 0 = \left\{ \frac{-i}{(\mu - x)^2} S(x - x'; x) + \frac{i}{\mu(\mu - x)} \left[(2\lambda + 3) + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right] S(x - x', \mu) \right\}_{x_0 = x_0'} .$$

Mit

$$S(x)_{/x_0 = 0} = i \gamma^0 \delta(\vec{x})$$

folgt

$$(2\lambda + 3) = \frac{\mu}{\mu - x} \,,$$

woraus λ bestimmt wird. Man erhält dann:

$$\left\{ C(x), \bar{C}(x') \right\} = \frac{-i}{(\mu - x)^2} S(x - x'; x) + \frac{i}{\mu(\mu - x)} \left(\frac{\mu}{\mu - x} - \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right) S(x - x'; \mu) \cdot \qquad \text{(A.1.12)}$$

Im Impulsraum erhält man aus (A.1.12) für den Kommutator:

$$\tilde{F}(k) = \frac{1}{(\mu - x)^2} \cdot \frac{\not{k} + x}{x^2 - k^2} - \frac{1}{(\mu - x)^2} \cdot \frac{\not{k} + \mu}{\mu^2 - k^2} - \frac{1}{\mu - x} \cdot \frac{(\not{k} + \mu)^2}{(\mu^2 - k^2)^2} = \frac{(\not{k} + x)(\not{k} + \mu)^2}{(x^2 - k^2)(\mu^2 - k^2)^2} \,. \qquad \text{(A.1.13)}$$

Man gelangt also genau zu dem Propagator (2.1). (A.1.13) kann daher als eine Lehmann-Zerlegung für den Propagator betrachtet werden. Die Fouriertransformation

$$F^+(x-x') = \langle 0|\, \chi(x)\, \chi(x')\, |0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \oint_{C^+} \tilde{F}(k)\, e^{-ik(x-x')}\, dk$$

ergibt nach Residualintegration über k^0 mit /14/

$$\omega^2(m) := m^2 + \vec{k}^2$$

$$F^+(x-x') =$$

$$\frac{2\pi i}{(2\pi)^4} \left\{ \int \frac{-1}{(\mu-\varkappa)^2} \cdot \frac{k(\varkappa)+\varkappa}{2\,\omega_k(\varkappa)}\, e^{-ik(\varkappa)(x-x')}\, d^3k \right. \qquad \text{(A.1.14)}$$

$$+ \int \frac{1}{(\mu-\varkappa)^2} \cdot \frac{k(\mu)+\mu}{2\,\omega_k(\mu)}\, e^{-ik(\mu)(x-x')}\, d^3k$$

$$- \frac{1}{\mu-\varkappa} \int e^{-ik(\mu)(x-x')}\, d^3k \left[\frac{\gamma^0\,(k(\mu)+\mu)}{4\,\omega_k^2(\mu)} \right.$$

$$\left. \left. - \frac{i\,(x_0-x_0')\,(k(\mu)+\mu)^2}{4\,\omega_k^2(\mu)} - \frac{2\,(k(\mu)+\mu)^2}{8\,\omega_k^3(\mu)} \right] \right\}.$$

Mit der Relation

$$\sum_s u_\alpha(\vec{k},s)\,\bar{u}_\beta(\vec{k},s) = \frac{1}{2m}\,(k+m)_{\alpha\beta}$$

erhält man daraus

$$\begin{aligned} F(x-x') = {} & \frac{i}{(2\pi)^3}\cdot \\ & -\frac{1}{(r-x)^2}\sum_s \int \frac{d^3k\cdot x}{\omega(x)} \langle 0|\chi(x)|k,s,u\rangle\langle k,s,u|\bar{\chi}(x')|0\rangle \\ & +\frac{1}{(r-x)}\sum_s \int \frac{d^3k\cdot r}{2\omega(r)} \langle 0|\chi(x)|k,s,g\rangle\langle k,s,d|\bar{\chi}(x')|0\rangle \\ & -\frac{1}{(r-x)}\sum_s \int \frac{d^3k\cdot r}{2\omega(r)} \langle 0|\chi(x)|k,s,d\rangle\langle k,s,g|\bar{\chi}(x')|0\rangle \end{aligned} \qquad \text{(A.1.15)}$$

mit

$$\begin{aligned} \langle 0|\chi(x)|k,s,u\rangle &:= u^s(\vec{k})\, e^{-ik(x)\cdot x} \\ \langle 0|\chi(x)|k,s,g\rangle &:= u^s(\vec{k})\, e^{-ik(r)\cdot x} \\ \langle 0|\chi(x)|k,s,d\rangle &:= u^s(\vec{k})\left(\frac{1}{r-x}+\frac{1}{2\omega^2(r)}+\frac{\gamma^0}{2\omega(r)}-\frac{ix_0}{\omega(r)}\right)e^{-ik(r)\cdot x}. \end{aligned} \qquad \text{(A.1.16)}$$

Nach /14/ ist in diesem Fall der metrische Fundamentaltensor g gegeben als:

$$g(p,s,r,p',s',r') = \delta_{pp'}\,\delta_{ss'}\,\hat{g}_{rr'}$$

Die Impuls- und Spinanteile sind also diagonal, während $\hat{g}_{rr'}$ durch

$$\hat{g}_{rr'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, wobei r = n , g , d , für ein Nukleon, einen Geist und einen Dipolgeist steht. D.h. diese Zerlegung macht eine indefinite Metrik unumgänglich.

Für das Skalarprodukt folgt /14/:

$$\hat{g}_{rr'} = \begin{pmatrix} \langle n|n\rangle & \langle n|g\rangle & \langle n|d\rangle \\ \langle g|n\rangle & \langle g|g\rangle & \langle g|d\rangle \\ \langle d|n\rangle & \langle d|g\rangle & \langle d|d\rangle \end{pmatrix} .$$

Es gilt also:

$$\langle g|g\rangle = \langle d|d\rangle = 0 .$$

Das ermöglicht eine Mischung der Geister in der S-Matrix, ohne daß physikalisch etwas geändert wird. Davon wird bei der Unitarisierung der S-Matrix Gebrauch gemacht.

Anhang II

Hier sollen die σ -Funktionen für die Einteilchenzustände explizit berechnet werden.

Aus (A.1.16) liest man direkt die Einteilchen- φ -Funktionen ab:

$$\varphi_k(x|u) = u^s(\vec{k})\, e^{-ik(x)x}$$

$$\varphi_k(x|g) = u^s(\vec{k})\, e^{-ik(\mu)x} \qquad \text{(A.2.1)}$$

$$\varphi_k(x|d) = u^s(\vec{k})\, e^{-ik(\mu)x}\left(\frac{1}{\mu - x} + \frac{1}{2\omega^2(\mu)} + \frac{\gamma^0}{2\omega(\mu)} - \frac{i x_0}{\omega(\mu)}\right).$$

u, g und d beziehen sich auf Nukleonen, Geister und die Dipolgeister, wobei $\varkappa$ die Nukleonmasse und μ die Geistermasse ist. Die Fouriertransformation lautet:

$$\varphi_k(q|u) = (2\pi)^4\, u^s(\vec{k})\, \delta(k-q) \qquad \text{(A.2.2)}$$

$$\varphi_k(q|g) = (2\pi)^4\, u^s(\vec{k})\, \delta(k-q)$$

$$\varphi_k(q|d) = (2\pi)^4\, \delta(k-q)\, u^s(\vec{k})\left(\frac{1}{\mu - x} + \frac{1}{2\omega^2(\mu)}\right.$$

$$\left. + \frac{\gamma^0}{2\omega(\mu)} - \frac{1}{\omega(\mu)}\cdot\frac{\partial}{\partial q_0}\right).$$

Die φ - und σ -Funktionen erfüllen die Orthogonalitätsrelationen (3.20) bzw. (3.27) /26/. Diese lauten explizit für

a) Nukleonen:

$$1)\quad (2\pi)^{-4}\int dq\ \bar{\varphi}_k(q|u)\,\sigma_{k'}(q|u) = (2\pi)^3\,\omega_k\,\delta^3(\vec{k}'-\vec{k})$$

$$2)\quad (2\pi)^{-4}\int dq\ \bar{\varphi}_k(q|g)\,\sigma_{k'}(q|u) = 0 \qquad \text{(A.2.3)}$$

$$3)\quad (2\pi)^{-4}\int dq\ \bar{\varphi}_k(q|d)\,\sigma_{k'}(q|u) = 0$$

b) Geister:

$$1)\quad (2\pi)^{-4}\int dq\ \bar{\varphi}_k(q|u)\,\sigma_{k'}(q|g) = 0$$

$$2)\quad (2\pi)^{-4}\int dq\ \bar{\varphi}_k(q|g)\,\sigma_{k'}(q|g) = 0 \qquad \text{(A.2.4)}$$

$$3)\quad (2\pi)^{-4}\int dq\ \bar{\varphi}_k(q|d)\,\sigma_{k'}(q|g) = (2\pi)^3\,\omega(\mu)\,\delta^3(\vec{k}'-\vec{k}).$$

c) Dipolgeister:

$$1)\quad (2\pi)^{-4}\int dq\ \bar{\varphi}_k(q|u)\,\sigma_{k'}(q|d) = 0$$

$$2)\quad (2\pi)^{-4}\int dq\ \bar{\varphi}_k(q|g)\,\sigma_{k'}(q|d) = (2\pi)^3\,\omega(\mu)\,\delta^3(\vec{k}'-\vec{k}) \qquad \text{(A.2.5)}$$

$$3)\quad (2\pi)^{-4}\int dq\ \bar{\varphi}_k(q|d)\,\sigma_{k'}(q|d) = 0\,.$$

Mit diesen Relationen kann man dann die σ -Funktionen ausrechnen:

a) Nukleonen:

Mit dem Ansatz

$$\sigma_k(q|u) = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}-\vec{q})\, f_u(q_o)\, u^s(\vec{k}) \qquad (A.2.6)$$

folgen aus (A.2.2) und (A.2.3) für $f_n(q_o)$ die Bedingungen:

$$f_u(q_o)\Big/_{q_o=\omega(x)} = \omega_k(x)$$

$$f_u(q_o)\Big/_{q_o=\omega(\mu)} = f_u'(q_o)\Big/_{q_o=\omega(\mu)} = 0 \,. \qquad (A.2.7)$$

Man kann also für f_n ansetzen:

$$f_u(q_o) = \frac{(q_o-\omega(\mu))^2}{(\omega(x)-\omega(\mu))^2}\cdot \omega(x)\, e^{-(q_o-\omega(x))^2} \qquad (A.2.8)$$

b) Geister:

Mit dem Ansatz

$$\sigma_k(q|g) = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}-\vec{q})\, f_g(q_o)\, u^s(\vec{k}) \qquad (A.2.9)$$

folgt aus (A.2.2) und (A.2.4)

$$f_g(q_o)\Big/_{q_o=\omega(x)} = 0 \quad ; \quad f_g(q_o)\Big/_{q_o=\omega(\mu)} = 0$$

$$f_g'(q_o)\Big/_{q_o=\omega(\mu)} = -\omega^2(\mu)$$

und damit für $f_n(q_o)$:

$$f_g(q_o) = \frac{(q_o - \omega(x))(q_o - \omega(\mu))}{\omega(x) - \omega(\mu)} (-\omega^2(\mu)) e^{-(q_o - \omega(\mu))^2} . \qquad (A.2.10)$$

c) Dipolgeister:

Mit dem Ansatz

$$\sigma_k(q|d) = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{q}) f_d(q_o) u^s(\vec{k})$$

folgt mit (A.2.2) und (A.2.5)

$$f_d(q_o)_{q_o = \omega(x)} = 0 \quad ; \quad f_d(q^o)_{q_o = \omega(\mu)} = \omega(\mu)$$

$$f_d'(q_o)_{q_o = \omega(\mu)} = \omega^2(\mu) \left(\frac{1}{\mu - x} + \frac{1}{2\omega^2(\mu)} + \frac{\gamma^o}{2\omega(\mu)} \right)$$

und damit für $f_n(q_o)$

$$f_d(q_o) = \frac{q_o - \omega(x)}{\omega(\mu) - \omega(x)} e^{-(q_o - \omega(\mu))^2} \left[\omega(\mu) + (q_o - \omega(\mu)) \left(\frac{\omega^2(\mu)}{\mu - x} + \frac{1}{2} + \frac{\gamma^o \omega(\mu)}{2} - \frac{\omega(\mu)}{\omega(\mu) - \omega(x)} \right) \right] .$$

Zusammengefaßt hat man dann für σ -Funktionen:

$$\begin{aligned} \sigma_k(q|u) &= (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{q}) f_u(q_o) u^s(\vec{k}) \\ \sigma_k(q|g) &= (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{q}) f_g(q_o) u^s(\vec{k}) \\ \sigma_k(q|d) &= (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{q}) f_d(q_o) u^s(\vec{k}) \end{aligned} \qquad (A.2.11)$$

mit

$$f_u(\varphi_0) = \frac{(\varphi_0 - \omega(\mu))^2}{(\omega(\varkappa) - \omega(\mu))^2}\ \omega(\varkappa)\ e^{-(\varphi_0 - \omega(\varkappa))^2} \tag{A.2.12}$$

$$f_g(\varphi_0) = \frac{(\varphi_0 - \omega(\varkappa))(\varphi_0 - \omega(\mu))}{\omega(\mu) - \omega(\varkappa)}\ (-\omega^2(\mu))\ e^{-(\varphi_0 - \omega(\varkappa))^2}$$

$$f_d(\varphi_0) = \frac{\varphi_0 - \omega(\varkappa)}{\omega(\mu) - \omega(\varkappa)}\ e^{-(\varphi_0 - \omega(\varkappa))^2}\left[\ \omega(\mu) + \right.$$

$$\left. + (\varphi_0 - \omega(\mu))\left(\frac{\omega^2(\mu)}{\mu - \varkappa} + \frac{1}{2} + \frac{\mathcal{K}''\omega(\mu)}{2} - \frac{\omega(\mu)}{\omega(\mu) - \omega(\varkappa)}\right)\right].$$

Anhang III

1. Formeln für den Abschnitt 3.4

Die hier angegebenen Formeln sind in /10b/ berechnet worden. Es gilt die Relation

$$\partial_\alpha(x)\, j_{\alpha_1}(x_1)\cdots j_{\alpha_n}(x_n) = (-)^n j_{\alpha_1}(x_1)\cdots j_{\alpha_n}(x_n)\,\partial_\alpha(x) \qquad \text{(A.3.1)}$$

$$+\sum_{r=1}^{n}(-)^{r+1}\,\delta(x_r-x)\,\delta_{\alpha\alpha_r}\, j_{\alpha_1}(x_1)\cdots j_{\alpha_{r-1}}(x_{r-1})\, j_{\alpha_{r+1}}(x_{r+1})\cdots j_{\alpha_n}(x_n)\cdot$$

Mit (A.3.1) findet man für das $|\mathfrak{t}(j,a)\rangle$ - Funktional (vgl. (3.8)

$$|\mathfrak{t}(j,a)\rangle := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int \langle 0|T\,\psi_{\alpha_1}(x_1)\cdots\psi_{\alpha_n}(x_n)|a\rangle\, j^{\alpha_1}(x_1)\cdots$$

$$\cdots j^{\alpha_n}(x_n)\,dx_1\cdots dx_n\,|\Phi_0\rangle\cdot$$

Mit $\partial_\alpha(x)|\Phi^0\rangle = 0$ folgt:

$$\partial_\alpha(x)|\mathfrak{t}(j,a)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int\langle 0|T\,\psi_{\alpha_1}(x_1)\cdots\psi_{\alpha_n}(x_n)|a\rangle \qquad \text{(A.3.2)}$$

$$\cdot\sum_{r=1}^{n}(-)^{r+1}\,\delta(x_r-x)\,\delta_{\alpha\alpha_r}\, j^{\alpha_1}(x_1)\cdots$$

$$\cdots j^{\alpha_{r-1}}(x_{r-1})\, j^{\alpha_{r+1}}(x_{r+1})\cdots j_{\alpha_n}(x_n)\,|\Phi_0\rangle =$$

$$= i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i}{n!}\int\langle 0|T\,\psi_{\alpha_1}(x_1)\cdots\psi_{\alpha_n}(x_n)\,\psi_\alpha(x)|a\rangle\, j^{\alpha_1}(x_1)\cdots j^{\alpha_n}(x_n)|\Phi_0\rangle\,dx_1\cdots dx_n\cdot$$

2. Für die zeitliche Ableitung der zeitgeordneten Produkte gilt:

$$T\, x_1 \cdots x_n x := T\, \psi_{\alpha_1}(x_1) \cdots \psi_{\alpha_n}(x_n)\, \psi_\alpha(x) \tag{A.3.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T\, x_1 \cdots x_n x = T\, x_1 \cdots x_n \dot{x} -$$

$$- \sum_{\nu=1}^{n} (-)^{\nu} (i A_{\alpha\alpha_\nu}) \delta(x - x_\nu)\, T\, x_1 \cdots x_{\nu-1} x_{\nu+1} \cdots x_n .$$

$A_{\alpha\alpha_\nu}$ ist durch die Vertauschungsrelationen des Feldes $\psi(x)$ gegeben.

Anhang IV

Die freien Zustandsfunktionale

Die Funktionale sind die Lösungen der Feldgleichung (3.34)

$$D_{\alpha\beta}\,\partial_\beta(x)\,|\Phi^c(j,a)\rangle = 0. \tag{3.34}$$

Wie in /21/ dargelegt wird, können diese Zustände mit Cluster-Zuständen in der Kernphysik verglichen werden.

Wir wollen zunächst die Einteilchenzustände untersuchen. Mit der Definition (3.17) für das Zustandsfunktional kann man für das freie Einteilchen-Funktional (Einteilchen-Cluster-Zustand) setzen:

$$|\Phi^c(j,k)\rangle = i\,\varphi^c\left(\begin{matrix}x\\ \alpha\end{matrix}|k\right)\,j_\alpha(x)\,|\Phi_0\rangle \tag{A.4.1}$$

K ist dabei ein Satz von Quantenzahlen, die den Zustand charakterisieren. Außerdem wurde in (A.4.1) die Summen- und Integrationskonvention benützt ($\alpha = 1, 2$) . φ^c ist dabei definiert als

$$\varphi^c\left(\begin{matrix}x\\ \alpha\end{matrix}|k\right) := \langle 0|\,\eta_\alpha(x)|K\rangle \tag{A.4.2}$$

und erfüllt die Feldgleichung

$$D_{\alpha\beta}\,\varphi^c\left(\begin{matrix}x\\ \beta\end{matrix}|k\right) = 0\,, \tag{A.4.3}$$

wobei $D_{\alpha\beta}$ der bekannte Differentialoperator ist.

Diese Funktion kann direkt aus (A.1.13) ermittelt werden. Für die Nukleonen lauten sie z.B.:

$$\varphi^c\left(\begin{matrix}x\\ \alpha\end{matrix}|n,k\right) = \varphi^c_\alpha(\vec{k})\,e^{-ik\cdot x} = \begin{cases}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\,u^s(\vec{k})\,e^{-ikx} & \alpha = 1\\ 0 & \alpha = 2.\end{cases} \tag{A.4.4}$$

Die Fouriertransformation von (A.4.4) lautet

$$\tilde{\varphi}^c\left(\begin{matrix} q \\ \alpha \end{matrix} \middle| u, k\right) = \int dx\, e^{iqx}\, \varphi^c\left(\begin{matrix} x \\ \alpha \end{matrix} \middle| k\right) = \tag{A.4.5}$$

$$= (2\pi)^4\, \delta(q-k)\, \varphi^c_\alpha(\vec{k}).$$

Definiert man nun durch

$$a^+(k) := i\, \varphi^c\left(\begin{matrix} x \\ \alpha \end{matrix} \middle| k\right) j_\alpha(x) \tag{A.4.6}$$

den Einteilchenerzeugungsoperator, so kann man ein freies Mehrteilchen-Zustandsfunktional (Mehrteilchen-Cluster) aus diesem Operator aufbauen. Man hat dann

$$|\Phi^c_u(k_1, \dots, k_u)\rangle = 1/\sqrt{u!} \cdot a^+(k_1) \cdots a^+(k_u)\, |\Phi_0\rangle \tag{A.4.7}$$

$$= \frac{i^u}{(u!)^{1/2}} \varphi^c\left(\begin{matrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{matrix} \middle| k_1\right) \cdots \varphi^c\left(\begin{matrix} x_u \\ \alpha_u \end{matrix} \middle| k_u\right) j_{\alpha_1}(x_1) \cdots j_{\alpha_u}(x_u)\, |\Phi_0\rangle$$

$$= \frac{i^u}{(u!)^{1/2} \cdot u!} \sum_{\lambda_1 \cdots \lambda_u} (-)^p \varphi^c\left(\begin{matrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{matrix} \middle| k_{\lambda_1}\right) \cdots \varphi^c\left(\begin{matrix} x_u \\ \alpha_u \end{matrix} \middle| k_{\lambda_u}\right) \cdot j_{\alpha_1}(x_1) \cdots j_{\alpha_u}(x_u)\, |\Phi_0\rangle$$

$$:= i^u/u! \cdot \varphi^c_u\left(\begin{matrix} x_1 \cdots x_u \\ \alpha_1 \cdots \alpha_u \end{matrix} \middle| k_1 \cdots k_u\right) j_{\alpha_1}(x_1) \cdots j_{\alpha_u}(x_u)\, |\Phi_0\rangle .$$

$K_1 \dots K_n$ ist die den n-Teilchen-Zustand charakterisierende Menge der Quantenzahlen. Dieser Zustand ist natürlich dann realisierbar, wenn die einzelnen "Cluster" soweit voneinander entfernt sind, daß keine Wechselwirkung zwischen ihnen existiert (vgl. asymptotische freie Zustände).

Für die freien Zweiteilchen-Nukleonzustände hat man dann nach (A.4.7) und (A.4.4)

$$|\Phi_2^c(j,k_1,k_2)\rangle = \frac{i^2}{2}\,\varphi_2^c\left(\begin{matrix}x_1 & x_2\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{matrix}\middle|\, u, k_1, k_2\right) \dot{d}_{\alpha_1}(x_1)\,\dot{d}_{\alpha_2}(x_2)|\Phi_0\rangle$$

mit

$$\varphi_2^c\left(\begin{matrix}x_1 & x_2\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{matrix}\middle|\, u, \begin{matrix}k_1,k_2\end{matrix}\right) = \frac{1}{2}\sum_{\lambda_1,\lambda_2}(-)^P \varphi^c\left(\begin{matrix}x_1\\ \alpha_1\end{matrix}\middle|\, k_{\lambda_1}\right)\varphi^c\left(\begin{matrix}x_2\\ \alpha_2\end{matrix}\middle|\, k_{\lambda_2}\right), \qquad \text{(A.4.8)}$$

oder fouriertransformiert und mit (A.4.4)

$$\varphi_2^c\left(\begin{matrix}q_1 & q_2\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{matrix}\middle|\, u, \begin{matrix}k_1,k_2\end{matrix}\right) = \qquad \text{(A.4.9)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(2\pi)^{-8}\sum_{\lambda_1,\lambda_2}(-)^P\,\varphi_{\alpha_1}^c(\vec{k}_{\lambda_1})\cdot\varphi_{\alpha_2}^c(\vec{k}_{\lambda_2})\,\delta(q_1-k_{\lambda_1})\,\delta(q_2-k_{\lambda_2}).$$

Analog kann man auch einen dualen Mehrteilchen-Clusterzustand $|\sigma_u^c(j,a)\rangle$ mit Koeffizienten $\sigma_u^c(j,a)$ konstruieren. Hier geben wir die $\sigma_2^c(j,a)$ für Nukleonen im Impulsraum an, da wir sie ja brauchen. Analog zu (A.4.4) hat man aus (A.2.11)

$$\sigma^c\left(\begin{matrix}q\\ \alpha\end{matrix}\middle|\, \begin{matrix}u\\ k\end{matrix}\right) = (2\pi)^3\,\delta(\vec{k}-\vec{q})\,f_u(q_0)\,\sigma_\alpha^c(\vec{k})$$

mit

$$\sigma_\alpha^c(\vec{k}) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\, u^s(\vec{k}) & \alpha = 1 \\ 0 & \alpha = 2. \end{cases}$$

Damit folgt dann für den Zweiteilchenzustand:

$$\sigma_2^c\left(\begin{matrix} q_1 & q_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} n, \\ k_1 k_2 \end{matrix}\right) = \tag{A.4.10}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(2\pi)^6 f_n(q_1^\circ) f_n(q_2^\circ) \sum_{\lambda_1 \lambda_2} (-)^\rho \delta(\vec{q}_1 - \vec{k}_{\lambda_1}) \delta(\vec{q}_2 - \vec{k}_{\lambda_2}) \sigma_{\alpha_1}^c(\vec{k}_{\lambda_1}) \sigma_{\alpha_2}^c(\vec{k}_{\lambda_2}).$$

Anhang V: Berechnung der Streuzustände

V.1. Die erste Näherung

Im Folgenden wird die Summen- und Integrationskonvention verwendet. Aus (3.17) und (3.18) folgt, daß diese Funktion für zwei Teilchen durch die Relation

$$\varrho_2\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} a = \frac{1}{i^2}\, \partial_{\alpha_2}(x_2)\,\partial_{\alpha_1}(x_1)\, |\Phi'(j,a)\rangle\rangle\Big/_{j=0} \qquad (A.5.1)$$

gegeben ist, wobei

$$|\Phi'(j,a)\rangle\rangle = H_1\, |\Phi^c(j,a)\rangle\rangle \qquad (A.5.2)$$

der Streuzustand ist. Für H_1 folgt aus Abschnitt 3.5

$$H_1 = -j_\alpha(x)\cdot H'_\alpha(x) \qquad (A.5.3)$$

mit

$$H'_\alpha(x) = g_0\, V_{\alpha\beta\gamma\delta}\, d_\beta(x)\, d_\gamma(x)\, d_\delta(x),$$

wobei

$$d_\alpha(x) := -F_{\alpha\beta}(xy)\, j_\beta(y) + \partial_\alpha(x)$$

gilt.

Setzen wir das in (A.5.3) ein, so ergibt sich nach Normalordnung der Operatoren $j_\alpha(x)$ und $\delta_\alpha(x)$ für H_1

$$H_1 = -g_0 j_\alpha(x) \cdot \tag{A.5.4}$$

$$\cdot\Big[-V_{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\beta\alpha_2}(xx_2) F_{\gamma\alpha_3}(xx_3) F_{\delta\alpha_4}(xx_4) j_{\alpha_2}(x_2) j_{\alpha_3}(x_3) j_{\alpha_4}(x_4)$$

$$+ W_{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\beta\alpha_2}(xx_2) F_{\gamma\alpha_3}(xx_3) j_{\alpha_2}(x_2) j_{\alpha_3}(x_3) \partial_\delta(x)$$

$$- \hat{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\beta\alpha_2}(xx_2) j_{\alpha_2}(x_2) \partial_\gamma(x) \partial_\delta(x) - V_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\beta(x) \partial_\gamma(x) \partial_\delta(x)\Big]$$

Dabei wurden die folgenden Abkürzungen vorgenommen:

$$W_{\alpha\beta\gamma\delta} := V_{\alpha\beta\gamma\delta} + V_{\alpha\delta\beta\gamma} - V_{\alpha\beta\delta\gamma} \tag{A.5.5}$$

$$\hat{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} := V_{\alpha\beta\gamma\delta} + V_{\alpha\gamma\delta\beta} - V_{\alpha\gamma\beta\delta}$$

Außerdem wurde berücksichtigt, daß im Falle der nichtkanonischen Quantisierung die Zweipunktfunktionen am gleichen Ort verschwinden. Setzen wir noch für $|\Phi^c(j,a)\rangle\rangle$ aus dem Anhang IV ein, so folgt aus (A.5.1):

$$\mathcal{G}_2\begin{pmatrix} x_1' & x_2' \\ \alpha_1' & \alpha_2 \end{pmatrix} a\Big) = \frac{1}{i^2} \partial_{\alpha_2'}(x_2') \partial_{\alpha_1'}(x_1') \cdot \left(-g_0 j_\alpha(x)\right) \cdot \tag{A.5.6}$$

$$\Big(-V_{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\beta\alpha_2}(xx_2) F_{\gamma\alpha_3}(xx_3) F_{\delta\alpha_4}(xx_4) j_{\alpha_2}(x_2) j_{\alpha_3}(x_3) j_{\alpha_4}(x_4)$$

$$+ W_{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\beta\alpha_2}(xx_2) F_{\gamma\alpha_3}(xx_3) j_{\alpha_2}(x_2) j_{\alpha_3}(x_3) \partial_\delta(x)$$

$$-\hat{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\beta\alpha_2}(x x_2)\, j_{\alpha_2}(x_2)\, \partial_\gamma(x)\, \partial_\delta(x) \qquad \text{(A.5.6)}$$

$$-V_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \partial_\beta(x)\, \partial_\gamma(x)\, \partial_\delta(x)\Big) \cdot$$

$$\cdot \frac{i^2}{\sqrt{2}}\, \varphi^c\begin{pmatrix} x_5 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} K_1\Big)\, \varphi^c\begin{pmatrix} x_6 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} K_2\Big)\, j_{\alpha_5}(x)\, j_{\alpha_6}(x_6)\, |\Phi_0\rangle \Big/_{j=0} ,$$

wobei die Quantenzahlen K_1 und K_2 die Einteilchenzustände charakterisieren.

Berücksichtigt man die Relation

$$\partial_\alpha(x)\ |\Phi_0\rangle = 0 ,$$

und setzt man $j = 0$, so ergibt nur der vorletzte Term einen nichtverschwindenden Beitrag, der lautet:

$$\varphi_2\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} a\Big) = g_0 \hat{V}_{\alpha_1\beta\gamma\delta} F_{\beta\alpha_2}(x_1 x_2) \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi^c\begin{pmatrix} x_1 \\ \delta \end{pmatrix} K_1\Big)\, \varphi^c\begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma \end{pmatrix} K_2\Big) \qquad \text{(A.5.7)}$$

$$- g_0 \hat{V}_{\alpha_2\beta\gamma\delta} F_{\beta\alpha_1}(x_2 x_1) \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi^c\begin{pmatrix} x_2 \\ \delta \end{pmatrix} K_1\Big)\, \varphi^c\begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma \end{pmatrix} K_2\Big) \cdot$$

Bei der Berechnung der T-Matrix benötigen wir die Fouriertransformierte von (A.5.7). Diese lautet:

$$\tilde{\varphi}_2\begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} a\Big) = \tilde{\varphi}_2(q_1, q_2 | a) = \qquad \text{(A.5.8)}$$

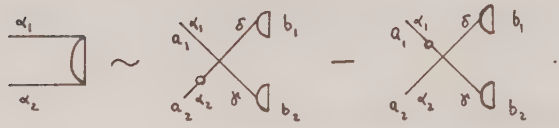
$$= \int e^{i q_1 x_1}\, e^{i q_2 x_2}\, \varphi_2\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} a\Big)\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= (2\pi)^4 g_0 \, \delta(q_1 + q_2 - k_1 - k_2) \cdot \qquad \text{(A.5.8)}$$

$$\cdot \left(\hat{V}_{\alpha_1 \beta \gamma \delta} \, \tilde{F}_{\beta_2 \alpha_2}(-q_2) - \hat{V}_{\alpha_2 \beta \gamma \delta} \, \tilde{F}_{\beta \alpha_1}(-q_1) \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \varphi^c_\delta(\vec{k}_1) \, \varphi^c_\gamma(\vec{k}_2) \cdot$$

Mit den graphischen Symbolen /30/

lautet (A.5.8) graphisch:



V.2. Die zweite Näherung

Die Streufunktion lautet in der zweiten Näherung nach (4.26):

$$|\Phi'(j,a)\rangle = H_1 K |\Phi^c(j,a)\rangle$$

mit H_1 aus (A.5.3). Für den Operator K gilt nach (3.36)

$$K = \frac{g_0}{\varkappa^2}\, \partial_\beta(x)\, P_\lambda(x)\, \mathfrak{I}^\lambda\, G_{\beta\alpha}(x-x')\, V_{\alpha\gamma\varrho\eta}\, d_\varrho(x')\, d_\gamma(x')\, d_\eta(x'). \qquad \text{(A.5.9)}$$

Verfahren wir so wie bei der Berechnung von H_1 in (A.5.3), so erhalten wir für K den Ausdruck

$$K = \frac{g_0}{\varkappa^2}\, \partial_{\alpha_1}(x_1)\,(\mathfrak{I}^\mu P_\mu(x_1))\, G_{\alpha_1\alpha'}(x_1 x') \cdot \qquad \text{(A.5.10)}$$

$$\Big[V_{\alpha'\beta\gamma\delta}\, F_{\beta\alpha_2}(x'x_2)\, F_{\gamma\alpha_3}(x'x_3)\, F_{\delta\alpha_4}(x'x_4)\, \partial_{\alpha_2}(x_2)\, \partial_{\alpha_3}(x_3)\, \partial_{\alpha_4}(x_4) +$$

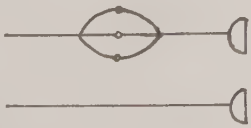
$$+ W_{\alpha'\beta\gamma\delta}\, F_{\beta\alpha_2}(x'x_2)\, F_{\gamma\alpha_3}(x'x_3)\, \partial_{\alpha_2}(x_2)\, \partial_{\alpha_3}(x_3)\, \partial_\delta(x') -$$

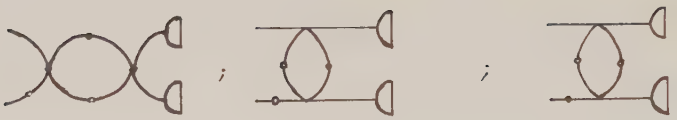
$$- \hat{V}_{\alpha'\beta\gamma\delta}\, F_{\beta\alpha_2}(x'x_2)\, \partial_{\alpha_2}(x_2)\, \partial_\gamma(x')\, \partial_\delta(x')$$

$$+ V_{\alpha'\beta\gamma\delta}\, \partial_\beta(x')\, \partial_\gamma(x')\, \partial_{\delta'}(x') \Big].$$

Wie bei der ersten Näherung kann man nun aus der Standardformel (A.5.1) die Strukturfunktionen ${}_2\mathfrak{G}'(q_1, q_2 \mid a)$, die man in (4.27) benötigt, ausrechnen. Die Rechnungen verlaufen analog zu denen der ersten Näherung. Es treten dabei folgende Typen von Feynman-Graphen auf:

Selbstenergieterm:





Der Selbstenergieterm kann hier vernachlässigt werden, da er zu der Einheit bei der S-Matrix hinzu addiert werden kann. Die anderen drei Graphen sind inäquivalente Graphen. Ihre einzelnen Beiträge lauten:

$$ {}_2\varphi'\left(\begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{matrix} \middle| \alpha_1 \alpha_2\right) = \frac{g_0^2}{\varkappa^2}\left(A + B + C \right). \qquad \text{(A.5.11)} $$

Dabei bedeuten:

$$ A := \Big(\tilde{V}_{\alpha_1\beta_1\beta_2\beta_3} F_{\beta_1\alpha_2}(x_1 x_2)\left(\mathfrak{F}^{\mu} P_{\mu}(x_1)\right) G_{\beta_2\alpha}(x_1 x) \hat{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\beta\beta_3}(x x_1) $$

$$ - \tilde{V}_{\alpha_2\beta_1\beta_2\beta_3} F_{\beta_1\alpha_1}(x_2 x_1)\left(\mathfrak{F}^{\mu} P_{\mu}(x_2)\right) G_{\beta_2\alpha}(x_2 x) \hat{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\beta\beta_3}(x x_2) \Big) \cdot $$

$$ \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\lambda_1\lambda_2} (-)^P \varphi^c\left(\begin{matrix} x \\ \delta \end{matrix} \middle| k_{\lambda_1}\right) \varphi^c\left(\begin{matrix} x \\ \gamma \end{matrix} \middle| k_{\lambda_2}\right), $$

$$ B := \Big(- \bar{V}_{\alpha_1\beta_1\beta_2\beta_3} \left(\mathfrak{F}^{\mu} P_{\mu}(x_1)\right) G_{\beta_1\alpha}(x_1 x) \bar{V}_{\alpha\rho\gamma\delta} F_{\beta\beta_2}(x x_1) F_{\gamma\alpha_2}(x x_2) \cdot $$

$$ \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\lambda_1\lambda_2} (-)^P \varphi^c\left(\begin{matrix} x \\ \delta \end{matrix} \middle| k_{\lambda_1}\right) \varphi^c\left(\begin{matrix} x_1 \\ \beta_3 \end{matrix} \middle| k_{\lambda_2}\right) + $$

$$+ \bar{V}_{\alpha_2\beta_1\beta_2\beta_3}\left(\mathfrak{F}^{\mu} P_{\mu}(x_2)\right) G_{\beta_1\alpha}(x_2 x)\, \bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}\, F_{\beta\beta_2}(x x_2)\, F_{\gamma\alpha_1}(x x_1)\cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\lambda_1\lambda_2} (-)^{P} \varphi^{c}\left(\begin{matrix} x \\ \delta \end{matrix} \middle| k_{\lambda_1}\right) \varphi^{c}\left(\begin{matrix} x_2 \\ \beta_3 \end{matrix} \middle| k_{\lambda_2}\right)\Big),$$

$$C := -\bar{V}_{\alpha_1\beta_1\beta_2\beta_3}\left(\mathfrak{F}^{\mu} P_{\mu}(x_1)\right) G_{\alpha_2\alpha}(x_2 x)\, V_{\alpha\beta\gamma\delta}\, F_{\beta\beta_1}(x x_1)\, F_{\gamma\beta_2}(x x_1)\cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\lambda_1\lambda_2} (-)^{P} \varphi^{c}\left(\begin{matrix} x \\ \delta \end{matrix} \middle| k_{\lambda_1}\right) \varphi^{c}\left(\begin{matrix} x_1 \\ \beta_3 \end{matrix} \middle| k_{\lambda_2}\right) +$$

$$+ \bar{V}_{\alpha_2\beta_1\beta_2\beta_3}\left(\mathfrak{F}^{\mu} P_{\mu}(x_2)\right) G_{\alpha_1\alpha}(x_1 x)\, V_{\alpha\beta\gamma\delta}\, F_{\beta\beta_1}(x x_2)\, F_{\gamma\beta_2}(x x_2)\cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sum_{\lambda_1\lambda_2} (-)^{P} \varphi^{c}\left(\begin{matrix} x \\ \delta \end{matrix} \middle| k_{\lambda_1}\right) \varphi^{c}\left(\begin{matrix} x_2 \\ \beta_3 \end{matrix} \middle| k_{\lambda_2}\right),$$

mit

$$\tilde{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} := \hat{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} - \hat{V}_{\alpha\beta\delta\gamma} = 2 \cdot \hat{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

$$\bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} := V_{\alpha\beta\gamma\delta} - V_{\alpha\beta\delta\gamma} + V_{\alpha\gamma\delta\beta} - V_{\alpha\delta\gamma\beta} + V_{\alpha\delta\beta\gamma} - V_{\alpha\gamma\beta\delta}.$$

Bei der Berechnung der T-Matrix benötigen wir die Fourier-Transformationen dieser Ausdrücke. Sie lauten:

$$\tilde{A} = \int dq\ \delta(q_1 + q_2 - k_1 - k_2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} (-)^P\ \tilde{\varphi}^c_\delta(\vec{k}_{\lambda_1}) \tilde{\varphi}^c_\gamma(\vec{k}_{\lambda_2}) \cdot$$

$$\cdot \Big[\tilde{V}_{\alpha_1 \beta_1 \beta_2 \beta_3}(\mathcal{F}^r q_r)\, \tilde{G}_{\beta_2 \alpha}(q)\, \hat{V}_{\alpha \beta \gamma \delta}\, \tilde{F}_{\beta \beta_3}(q - k_1 - k_2)\, \tilde{F}_{\beta_1 \alpha_2}(-q_2) -$$

$$- \tilde{V}_{\alpha_2 \beta_1 \beta_2 \beta_3}(\mathcal{F}^r q_r)\, \tilde{G}_{\beta_2 \alpha}(q)\, \tilde{V}_{\alpha \beta \gamma \delta}\, \tilde{F}_{\beta \beta_3}(q - k_1 - k_2)\, F_{\beta_1 \alpha_1}(-q_1) \Big]$$

$$\tilde{B} = -\int dq\, \delta(q_1 + q_2 - k_1 - k_2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sum_{\lambda_1 \lambda_2} (-)^P\ \tilde{\varphi}^c_\delta(\vec{k}_{\lambda_1}) \tilde{\varphi}^c_{\beta_3}(\vec{k}_{\lambda_2}) \cdot$$

$$\cdot \Big[\bar{V}_{\alpha_1 \beta_1 \beta_2 \beta_3}(\mathcal{F}^r q_r)\, \tilde{G}_{\beta_1 \alpha}(q)\, \bar{V}_{\alpha \beta \gamma \delta}\, \tilde{F}_{\beta \beta_2}(q + q_2 - k_{\lambda_1})\, \tilde{F}_{\gamma \alpha_2}(-q_2) -$$

$$- \bar{V}_{\alpha_2 \beta_1 \beta_2 \beta_3}(\mathcal{F}^r q_r)\, \tilde{G}_{\beta_1 \alpha}(q)\, \bar{V}_{\alpha \beta \gamma \delta}\, \tilde{F}_{\beta \beta_2}(q + q_1 - k_{\lambda_1})\, \tilde{F}_{\gamma \alpha_1}(-q_1) \Big]$$

$$\tilde{C} = -\int dq\, \delta(q_1 + q_2 - k_1 - k_2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sum_{\lambda_1 \lambda_2} (-)^P\ \tilde{\varphi}^c_\delta(\vec{k}_{\lambda_1})\, \tilde{\varphi}^c_{\beta_3}(\vec{k}_{\lambda_2}) \cdot$$

$$\Big[\bar{V}_{\alpha_1 \beta_1 \beta_2 \beta_3}(\mathcal{F}^r q_r)\, \tilde{G}_{\beta_2 \alpha}(q)\, V_{\alpha \beta \gamma \delta}\, \tilde{F}_{\beta \beta_1}(q + q_2 - k_{\lambda_1})\, \tilde{F}_{\gamma \alpha_2}(-q_2) -$$

$$- \bar{V}_{\alpha_2 \beta_1 \beta_2 \beta_3}(\mathcal{F}^r q_r)\, \tilde{G}_{\beta_1 \alpha}(q)\, \bar{V}_{\alpha \beta \gamma \delta}\, \tilde{F}_{\beta \beta_2}(q + q_1 - k_{\lambda_1})\, \tilde{F}_{\gamma \alpha_1}(-q_1) \Big] \cdot$$

Um die T-Matrix in der zweiten Näherung vollständig zu berechnen, muß man alle hier angegebenen Beiträge berücksichtigen. Wir werden aber hier nur den ersten Term betrachten. Wir setzen also

$$\tilde{\varphi}'_2(q_1 q_2 | a_1 a_2) \cong \frac{g^2}{\frac{\delta_0}{\kappa^2}} \cdot \tilde{A}.$$

Es ist zwar eine ziemlich grobe Näherung und kann kaum den Namen "die zweite Näherung" beanspruchen. Für den Zweck, den wir hier verfolgen, ist es aber ausreichend /15/.

Anhang VI

Berechnung der Integrale I_1 und I_2

VI.1. Das Integral I_1:

Es lautet:

$$I_1 = \frac{-(2\pi)^2 g_0}{2} \int dq_1\, dq_2\, \delta(q_1 + q_2 - k_1 - k_2) \cdot f_u(q_1^0)\, f_u(q_2^0) \cdot \tag{A.6.1}$$

$$\cdot \sum_{\lambda_1 \lambda_2} (-)^P \delta(\vec{q}_1 - \vec{k}'_{\lambda_1}) \delta(\vec{q}_2 - \vec{k}'_{\lambda_2}) \bar{\sigma}^c_{\alpha_1}(\vec{k}'_{\lambda_1}) \bar{\sigma}^c_{\alpha_2}(\vec{k}'_{\lambda_2}) \varphi^c_\delta(\vec{k}) \varphi^c_\gamma(\vec{k}_2)$$

$$\cdot \left(\hat{V}_{\alpha_1 \beta \gamma \delta} \tilde{F}_{\beta \alpha_2}(-q_2) - \hat{V}_{\alpha_2 \beta \gamma \delta} \tilde{F}_{\beta \alpha_1}(-q_1) \right).$$

Die Indizes in dieser Gleichung sind Doppelindizes, wie in Abschnitt 3.1 erwähnt wurde. Nach (A.4.4) und (A.4.9) verschwinden die Funktionen σ^c_α und φ^c_α für $\alpha = 2, \beta$, während sie für $\alpha = 1, \beta$ von Null verschieden sind /16/. Unter diesen Bedingungen stellt man aber fest (siehe Anhang VII), daß nur V_{1211} einen Beitrag liefert, wobei

$$\hat{V}_{1211} = 2 V^r \otimes V_{rr} = 2 V_{\beta_1 \beta_2} V_{\beta_3 \beta_4} \tag{A.6.2}$$

Es gelten außerdem die Relationen:

$$\tilde{F}_{11} = \tilde{F}_{22} = \tilde{G}_{12} = \tilde{G}_{21} = 0$$

$$\tilde{F}_{\alpha\beta}(-q) = -\tilde{F}_{\beta\alpha}(q). \tag{A.6.3}$$

Die erste Relation folgt direkt aus (2.4), (2.6) mit der Umformung (3.1). Die zweite Relation ist evident. Für NN-Streuung ergibt sich dann aus (A.6.1)

$$I_1 = (2\pi)^{-4} g_0 \int dq_1 dq_2 \cdot \delta(q_1+q_2-k_1-k_2) f_u(q_1^0) f_u(q_2^0) \cdot \qquad \text{(A.6.4)}$$

$$\cdot \sum_{\lambda_1 \lambda_2} (-)^P \delta(\vec{q}-\vec{k}'_{\lambda_1}) \delta(\vec{q}-\vec{k}_{\lambda_2})$$

$$\cdot \bar{u}_{\sigma_1}(\vec{k}'_{\lambda_1}) \bar{u}_{\sigma_2}(\vec{k}'_{\lambda_2}) u_{\sigma_4}(\vec{k}_1) u_{\sigma_3}(\vec{k}_2)$$

$$\cdot \left[(V_{\sigma_1\sigma_2 V_{\sigma_3\sigma_4}}) \tilde{F}_{|\sigma_2|_2\sigma_2}(q_2) - (V_{\sigma_2\sigma_2 V_{\sigma_3\sigma_4}}) \tilde{F}_{|\sigma_1|_2\sigma_2}(q_1) \right] \cdot$$

Um die Doppelindizes hervorzuheben, wurden diese in (A.6.4) nochmals ausgeschrieben. Der zweite Index ist der normale Dirac-Index und läuft von 0 bis 3 .

Die Zweipunktfunktion ist durch (2.6)

$$\tilde{F}_{\alpha\beta}(q) = \frac{-i\left[(\not{q}+\mu)^2(\not{q}+\varkappa)\right]_{\alpha\beta}}{(\varkappa^2-q^2)(\mu^2-q^2)^2} \qquad \text{(A.6.5)}$$

gegeben. Mit ihm erhält man aus (A.6.4):

$$I_1 = -(2\pi)^{-4} i\, g_0 \cdot \int dq_1 dq_2\, f_u(q_1^0) f_u(q_2^0) \cdot \delta(q_1+q_2-k_1-k_2) \cdot \qquad \text{(A.6.6)}$$

$$\cdot \sum_{\lambda_1 \lambda_2} (-)^P \delta(\vec{q}_1-\vec{k}'_{\lambda_1}) \delta(\vec{q}_2-\vec{k}'_{\lambda_2}) \bar{u}_{\sigma_1}(\vec{k}'_{\lambda_1}) \bar{u}_{\sigma_2}(\vec{k}'_{\lambda_2}) \cdot$$

$$\cdot\Big\{(V_{\sigma_1\beta_2}V_{\beta_3\beta_4})\cdot\frac{\big((\not k_2+\not r)^2(\not k_2+\not\kappa)\big)_{\sigma_2\beta_2}}{(\kappa^2-q_2^2)(\mu^2-q_2^2)^2}$$

$$-(V_{\sigma_2\beta_2}V_{\beta_3\beta_4})\cdot\frac{\big((\not k_1+\not r)^2(\not k_1+\not\kappa)\big)_{\sigma_1\beta_2}}{(\kappa^2-q_1^2)(\mu^2-q_1^2)^2}\Big\}\,u_{\beta_4}(\vec{k}_1)\,u_{\beta_3}(\vec{k}_2)\cdot$$

Die räumlichen Integrale können mit Hilfe der dreidimensionalen δ - Funktion ausgeführt werden; man erhält mit

$$k_1+k_2:=k \tag{A.6.7}$$

$$k_1'+k_2':=k'$$

$$I_1=-i\,(2\pi)^{-4}\,g_0\cdot\int dq_1^\circ dq_2^\circ\;\delta(q_1^\circ+q_2^\circ-k^\circ)\,f_u(q_1^\circ)\,f_u(q_2^\circ)\cdot \tag{A.6.8}$$

$$\cdot\sum_{\lambda_1\lambda_2}(-)^P\;\delta(\vec{k}'-\vec{k})\,\bar{u}_{\sigma_1}(\vec{k}'_{\lambda_1})\,\bar{u}_{\sigma_2}(\vec{k}'_{\lambda_2})\,u_{\sigma_4}(\vec{k}_1)\,u_{\beta_3}(\vec{k}_2)$$

$$\Big\{(V_{\sigma_1\beta_2}V_{\beta_3\beta_4})\,\frac{\big((\not k_2+\not r)^2(\not k_2+\not\kappa)\big)_{\sigma_2\beta_2}}{(\kappa^2-q_2^2)(\mu^2-q_2^2)^2}\;-$$

$$-(V_{\sigma_2\beta_2}V_{\beta_3\beta_4})\,\frac{\big((\not k_1+\not r)^2(\not k_1+\not\kappa)\big)_{\sigma_1\beta_3}}{(\kappa^2-q_1^2)(\mu^2-q_1^2)^2}\Big\}$$

wobei jetzt

$$\vec{q}_1=\vec{k}'_{\lambda_1} \tag{A.6.9}$$
$$\vec{q}_2=\vec{k}'_{\lambda_2}$$

gilt.

Mit der Relation

$$\omega_1(m) = (m^2 + \vec{q}_1^{\,2})^{1/2} \tag{A.6.10}$$

kann man für das Integral weiter schreiben:

$$I_1 = -(2\pi)^{-4} i g_0 \sum_{\lambda_1 \lambda_2} (-)^P \bar{u}_{\sigma_1}(\vec{k}'_{\lambda_1}) \bar{u}_{\sigma_2}(\vec{k}'_{\lambda_2}) u_{s_4}(\vec{k}_1) u_{s_3}(\vec{k}_2) \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot$$

$$\cdot \Big\{ \int dq_2^\circ \cdot f_u(k^\circ - q_2^\circ) f_u(q_2^\circ) (V_{\sigma_1 s_2} V_{s_3 s_4}) \cdot$$

$$\cdot \frac{((\not{k}_2 + \mu)^2 (\not{k}_2 + \varkappa))_{\sigma_2 s_2}}{(\omega_2^2(\varkappa) - q_2^{\circ 2})(\omega_2^2(\mu) - q_2^{\circ 2})^2} -$$

$$- \int dq_1^\circ \cdot f_u(q_1^\circ) f_u(k^\circ - q_1^\circ) (V_{\sigma_2 s_2} V_{s_3 s_4}) \cdot$$

$$\cdot \frac{((\not{k}_1 + \mu)^2 (\not{k}_1 + \varkappa))_{\sigma_1 s_2}}{(\omega_1^2(\varkappa) - q_1^{\circ 2})(\omega_1^2(\mu) - q_1^{\circ 2})^2} \Big\} .$$

Die verbleibenden Integrationen können nach der Residual-Methode durchgeführt werden. Dabei muß man beachten, daß nur positive Frequenzen zugelassen sind und die Doppelpole wegen der Bedingung (A.2.7) keinen Beitrag liefern. Man erhält dann für I_1 :

$$I_1 = \frac{(2\pi)^{-3} g_0 \delta(\vec{k}' - \vec{k})}{(\mu^2 - \vec{k}^2)^2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} (-)^P (V_{s_2 \sigma_2} V_{s_4 s_3}) u_{s_4}(\vec{k}_1) u_{s_3}(\vec{k}_2) \cdot \tag{A.6.11}$$

$$\cdot \bar{u}_{\sigma_1}(\vec{k}'_{\lambda_1}) \bar{u}_{\sigma_2}(\vec{k}'_{\lambda_2}) f_u(k^\circ - \omega_{\lambda_1}) \Big[(\not{k}'_{\lambda_1} + \mu)^2 (\not{k}'_{\lambda_1} + \varkappa) \Big]_{\sigma_1 s_2} =$$

$$= \frac{2\cdot(2\pi)^{-3} g_0 \delta(\vec{k}'-\vec{k})}{(\mu^2-\varkappa^2)^2} \cdot \left(V_{\sigma_2\sigma_2} V_{\sigma_4\sigma_3} \right) \cdot$$

$$\cdot u_{\sigma_4}(\vec{k}_1)\, \bar{u}_{\sigma_1}(\vec{k}_1')\, u_{\sigma_3}(\vec{k}_2)\, \bar{u}_{\sigma_2}(\vec{k}_2')\, f_u(k^\circ-\omega_1)\left[(k_1'+\mu)^2(k_1'+\varkappa)\right]_{\sigma_1\sigma_2}^{-1}.$$

VI.2. Das Integral I_2

Es lautet:

$$I_2 = -\frac{(2\pi)^{-2} g_0^2}{2\varkappa^2} \int dq\, dq_1\, dq_2\, \delta(q_1+q_2-k_1-k_2)\, f_u(q_1^\circ)\, f_u(q_2^\circ) \cdot \qquad \text{(A.6.12)}$$

$$\cdot \sum_{\lambda_1\lambda_2} (-)^P \delta(\vec{q}-\vec{k}_{\lambda_1}')\, \delta(\vec{q}_2-\vec{k}_{\lambda_2}') \cdot$$

$$\cdot \bar{\sigma}^c_{\alpha_1}(\vec{k}_{\lambda_1}')\, \bar{\sigma}^c_{\alpha_2}(\vec{k}_{\lambda_2}')\, \tilde{\varphi}^c_\delta(\vec{k}_1)\, \tilde{\varphi}^c_\gamma(\vec{k}_2) \cdot$$

$$\cdot \Big[\tilde{V}_{\alpha_1\beta_1\beta_2\beta_3}(\mathcal{F}^r q_\mu)\, \tilde{G}_{\beta_2\alpha}(q)\, \hat{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \tilde{F}_{\beta\beta_3}(q-k_1-k_2)\, \tilde{F}_{\beta_1\alpha_2}(-q_2) \cdot$$

$$- \tilde{V}_{\alpha_2\beta_1\beta_2\beta_3}(\mathcal{F}^r q_\mu)\, \tilde{G}_{\beta_2\alpha}(q)\, \hat{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \tilde{F}_{\beta\beta_3}(q-k_1-k_2)\, F_{\beta_1\alpha_1}(-q_1) \Big] \cdot$$

Das Ausrechnen des Integrals verläuft analog zu der Berechnung von I_1. Die Indizes sind hier wie dort Doppelindizes. Aus (A.4.4) und (A.4.9) folgt dann, daß nur die Kombination $(\tilde{V}_{1211}, \hat{V}_{1211})$ zu einem nichtverschwindenden Beitrag führt. Es gilt dann:

$$\tilde{V}_{1211} = 4\, v^r \otimes v_\mu$$

$$\hat{V}_{1211} = 2\, V^{\mu} \otimes V_{\mu} .$$

Setzen wir dies in (A.6.12) ein, so ergibt sich mit (A.6.3) für I_2 :

$$I_2 = \frac{-g_0^2}{4\varkappa^2 (2\pi)^8} \int d q_1\, d q_2\, d q\, f_u(q_1^0)\, f_u(q_2^0) \cdot \tag{A.6.13}$$

$$\cdot\, \delta(q_1 + q_2 - k_1 - k_2) \sum_{\lambda_1 \lambda_2} (-)^{\rho}\, \delta(\vec{q}_1 - \vec{k}'_{\lambda_1})\, \delta(\vec{q}_2 - \vec{k}'_{\lambda_2}) \cdot$$

$$\cdot\, \bar{u}_{\sigma_1}(\vec{k}'_{\lambda_1})\, \bar{u}_{\sigma_2}(\vec{k}'_{\lambda_2})\, u_{\sigma_4}(\vec{k})\, u_{\sigma_3}(\vec{k}_2) \cdot$$

$$\cdot \Big[(4 V_{\sigma_1 \sigma} V_{\sigma_5 \sigma_6})\, (\gamma^{\mu} q_{\mu})\, \tilde{G}_{\sigma_5 \sigma_1}(q)\, (2 V_{\sigma_1 \sigma_2} V_{\sigma_3 \sigma_4}) \cdot$$

$$\cdot\, \tilde{F}_{\sigma_6 \sigma_2}(k_1 + k_2 - q)\, \tilde{F}_{\sigma_2 \sigma}(q_2)$$

$$- (4 V_{\sigma_2 \sigma} V_{\sigma_5 \sigma_6})\, (\gamma^{\mu} q_{\mu})\, \tilde{G}_{\sigma_5 \sigma_1}(q)\, (2 V_{\sigma_1 \sigma_2} V_{\sigma_3 \sigma_4}) \cdot$$

$$\cdot\, \tilde{F}_{\sigma_6 \sigma_2}(k_1 + k_2 - q)\, \tilde{F}_{\sigma_1 \sigma}(q_1) \Big] \cdot$$

Die Indizes sind nun die normalen Dirac-Spinorindizes und laufen von (0 , 3) .

Setzen wir für $\tilde{F}_{\alpha\beta}(q)$ aus (A.6.5) und für $\tilde{G}_{\alpha\beta}(q)$ nach Anhang I

$$\tilde{G}_{\alpha\beta}(q) = \frac{\left[(\not{q} + \mu)^2 (\not{q} + \varkappa) \right]_{\alpha\beta}}{(\varkappa^2 - q^2)(\mu^2 - q^2)^2}$$

ein, so erhalten wir aus (A.6.13) den Ausdruck

$$I_2 = -\frac{g_0^2}{4\varkappa^2(2\pi)^8}\cdot\int d\mathfrak{q}\,d\mathfrak{q}_1 d\mathfrak{q}_2\, f_u(\mathfrak{q}_1^\circ)\, f_u(\mathfrak{q}_2^\circ)\cdot \tag{A.6.14}$$

$$\cdot\,\delta(\mathfrak{q}_1+\mathfrak{q}_2-k_1-k_2)\sum_{\lambda_1\lambda_2}(-)^P\,\delta(\vec{\mathfrak{q}}_1-\vec{k}'_{\lambda_1})\,\delta(\vec{\mathfrak{q}}_2-\vec{k}_{\lambda_2})\cdot$$

$$\cdot\,\bar{u}_{\sigma_1}(\vec{k}'_{\lambda_1})\,\bar{u}_{\sigma_2}(\vec{k}'_{\lambda_2})\,u_{\beta_4}(\vec{k}_1)\,u_{\beta_3}(\vec{k}_2)\cdot$$

$$\cdot\Bigg\{-(4V_{\sigma_1\beta}V_{\beta_5\beta_6})(2V_{\beta_1\beta_2}V_{\beta_3\beta_4})\cdot$$

$$\cdot\,\frac{(\mathfrak{f}^\mu\mathfrak{q}_\mu)\left[(\mathfrak{X}+\varkappa)(\mathfrak{X}+\mu)^2\right]_{\beta_5\beta_1}\left[(\mathfrak{Q}+\varkappa)(\mathfrak{Q}+\mu)^2\right]_{\beta_6\beta_2}\left[(\mathfrak{X}_2+\varkappa)(\mathfrak{X}_2+\mu)^2\right]_{\sigma_2\beta}}{(\varkappa^2-q^2)(\mu^2-q^2)^2(\varkappa^2-Q^2)(\mu^2-Q^2)^2(\varkappa^2-q_2^2)(\mu^2-q_2^2)}+$$

$$+(4V_{\sigma_2\beta}V_{\beta_5\beta_6})(2V_{\beta_1\beta_2}V_{\beta_3\beta_4})\cdot$$

$$\cdot\,\frac{(\mathfrak{f}^\mu\mathfrak{q}_\mu)\left[(\mathfrak{X}+\varkappa)(\mathfrak{X}+\mu)^2\right]_{\beta_5\beta_1}\left[(\mathfrak{Q}+\varkappa)(\mathfrak{Q}+\mu)^2\right]_{\beta_6\beta_2}\left[(\mathfrak{X}_1+\varkappa)(\mathfrak{X}_1+\mu)^2\right]_{\sigma_1\beta}}{(\varkappa^2-q^2)(\mu^2-q^2)^2(\varkappa^2-Q^2)(\mu^2-Q^2)^2(\varkappa^2-q_1^2)(\mu^2-q_1^2)^2}\Bigg\}\cdot$$

mit

$$Q := k_1 + k_2 - q \cdot$$

Die q_1 - und q_2 - Integrationen können mit Hilfe der räumlichen δ - Funktionen ausgeführt werden. Genauso kann auch entweder über q_1^o oder aber über q_2^o mit Hilfe der δ^o -Funktion integriert werden. Das verbleibende zeitliche Integral kann nun residual erstreckt werden. Dabei muß man nur die positiven Frequenzen berücksichtigen und die Eigenschaften (A.2.7) der Normierungsfunktion $f(q^o)$ beachten. Mit

$$k' := k_1' + k_2' \quad ; \quad k := k_1 + k_2 \quad ; \quad \omega_{\lambda_1}(m) := (\omega^2 - \vec{k}_{\lambda_1}'^2)^{1/2}$$

erhält man dann für das Integral:

$$I_2 = \frac{g_0^2\, 2\pi i\, \delta(\vec{k}' - \vec{k})}{\varkappa^2 (2\pi)^8 (\mu^2 - \varkappa^2)^2} \cdot \tag{A.6.15}$$

$$\sum_{\lambda_1 \lambda_2} (-)^P \Big\{ f_u(k^o - \omega_{\lambda_1}(\varkappa))(V_{\sigma_2 \beta} V_{\beta_5 \beta_6})(V_{\beta_1 \beta_2} V_{\beta_3 \beta_4}) \cdot$$

$$\cdot \bar{u}_{\sigma_1}(\vec{k}_{\lambda_1}') \bar{u}_{\sigma_2}(\vec{k}_{\lambda_2}') \Big[(k_{\lambda_1}' + \varkappa)(\vec{k}_{\lambda_1}' + \mu)^2 \Big]_{\sigma_1 \beta} -$$

$$- f_u(k^o - \omega_{\lambda_2}(\varkappa))(V_{\sigma_1 \beta} V_{\beta_5 \beta_6})(V_{\beta_1 \beta_2} V_{\beta_3 \beta_4}) \cdot$$

$$\cdot \bar{u}_{\sigma_1}(\vec{k}_{\lambda_1}') \bar{u}_{\sigma_2}(\vec{k}_{\lambda_2}') \Big[(k_{\lambda_2}' + \varkappa)(k_{\lambda_2}' + \mu)^2 \Big]_{\sigma_2 \beta} \Big\} \cdot$$

$$\cdot u_{\beta_4}(\vec{k}_1) u_{\beta_3}(\vec{k}_2) \cdot M_{\beta_5 \beta_1 \beta_6 \beta_2}(k),$$

mit

$$M_{\alpha\beta\gamma\delta}(k) := \int dq \; \frac{(\gamma^r q_r)\left((\not{q}+\varkappa)(\not{q}+\mu)^2\right)_{\alpha\beta}\left((\not{Q}+\varkappa)(\not{Q}+\mu)^2\right)_{\gamma\delta}}{(\varkappa^2-q^2)(\mu^2-q^2)(\varkappa^2-Q^2)(\mu^2-Q^2)^2}$$

Nützt man noch die Energie-Impuls-Erhaltung aus, so kann man für I_2 schreiben:

$$I_2 = \frac{4 g_0^2 (2\pi i)\, \delta(\vec{k}' - \vec{k})}{\varkappa^2 (2\pi)^8 (\mu^2-\varkappa^2)^2} \cdot \tag{A.6.16}$$

$$\cdot \bar{u}_{\sigma_1}(\vec{k}_1')\, \bar{u}_{\sigma_2}(\vec{k}_2')\, u_{\sigma_4}(\vec{k}_1)\, u_{\sigma_3}(\vec{k}_2) \cdot$$

$$\cdot f_4(k^0 - \omega_1(\varkappa))(V_{\sigma_2\sigma_5} V_{\sigma_3\sigma_6})(V_{\sigma_1\sigma_2} V_{\sigma_3\sigma_4}) \cdot$$

$$\left[(\not{k}_1'+\varkappa)(\not{k}_1'+\mu)^2\right]_{\sigma_1\sigma} \cdot M_{\sigma_5\sigma_1\sigma_6\sigma_2}(k) \cdot$$

Wir müssen noch die Größe $M_{\alpha\beta\gamma\delta}(k)$ ausrechnen. Sie lautet:

$$M_{\alpha\beta\gamma\delta}(k) = \int dq \; \frac{(\gamma^r q_r)\left((\not{q}+\varkappa)(\not{q}+\mu)^2\right)_{\alpha\beta}\left((\not{q}'+\varkappa)(\not{q}'+\mu)^2\right)_{\gamma\delta}}{(\varkappa^2-q^2)(\mu^2-q^2)^2(\varkappa^2-q'^2)(\mu^2-q'^2)^2} \tag{A.6.17}$$

mit

$$Q = k - q := q'.$$

Dies ist ein Feynman-Integral. Solche Integrale treten bei allen praktischen Rechnungen in der Quantenfeldtheorie auf. Es gibt

verschiedene Methoden zur Berechnung solcher Integrale /35/36 a,b/. Hier werden wir die sogenannte Exponentialmethode anwenden, die weiter unten angedeutet werden soll. Vorher führen wir die Spektralfunktionen

$$\rho(m^2) := \delta(m^2-\varkappa^2) - \delta(m^2-\mu^2) - (\mu^2-\varkappa^2)\,\delta'(m^2-\mu^2)$$

ein, um das Integral folgendermaßen umzuschreiben:

$$M_{\alpha\beta\gamma\delta}(k) = \frac{1}{(\mu^2-\varkappa^2)^4}\int_0^\infty dm_1^2\,dm_2^2\cdot\int dq\,\cdot \cdot\frac{\rho(m_1^2)\,\rho(m_2^2)\cdot Z}{(m_1^2-q'^2-i\varepsilon)(m_2^2-q^2-i\varepsilon)}\cdot \tag{A.6.18}$$

Dabei bezeichnet Z den gesamten Zähler von (A.6.17). Auch der Zähler kann etwas umgeschrieben werden:

$$Z := \left[(\not{q}'+\mu)^2(\not{q}'+\varkappa)\right]_{\alpha\beta}\cdot(\gamma^\rho q_\rho)\left[(\not{q}+\mu)^2(\not{q}+\varkappa)\right]_{\gamma\delta}\cdot$$

Für die beiden Matrizen kann man schreiben:

$$M_1 := \left[(\not{q}'+\mu)^2(\not{q}'+\varkappa)\right]_{\alpha\beta} = \left[\not{q}'(q'^2+\mu^2+2\varkappa\mu)+\varkappa q'^2+\varkappa\mu^2+2\mu q'^2\right]_{\alpha\beta}$$

$$M_2 := \left[(\not{q}+\mu)^2(\not{q}+\varkappa)\right]_{\alpha\beta} = \left[\not{q}(q^2+\mu^2+2\varkappa\mu)+\varkappa q^2+\mu^2\varkappa+2\mu q^2\right]_{\alpha\beta}$$

Wir wollen hier nur den Fall betrachten, daß nur Geister ausgetauscht werden. In diesem Fall können wir $q'^2 = q^2 = \mu^2$ setzen. Eleganter ist es, wenn man

$$q'^2 = m_1^2 \quad ; \quad q^2 = m_2^2$$

setzt. Dadurch werden auch Nukleonen als Austauschteilchen zugelassen. In diesem Fall erhält man für die Matrizen M_1 und M_2 :

$$M_1 = \left[\not{k}'(m_1^2+\mu^2+2\mu x) + x m_1^2 + x\mu^2 + 2\mu m_1^2 \right]_{\alpha\beta} \tag{A.6.19}$$

$$M_2 = \left[\not{k}(m_2^2+\mu^2+2\mu x) + x m_2^2 + x\mu^2 + 2\mu m_1^2 \right]_{\alpha\beta} \tag{A.6.20}$$

während für sie in dem hier betrachteten Fall

$$M_1 = (2\mu^2 + 2\mu x)(\not{k}' + \mu)_{\alpha\beta} \tag{A.6.21}$$

$$M_2 = (2\mu^2 + 2\mu x)(\not{k} + \mu)_{\alpha\beta} \tag{A.6.22}$$

gilt.

Für das Integral (A.6.18) erhält man dann aus (A.6.21) und (A.6.22) und nach einigen Manipulationen

$$M_{\alpha\beta\gamma\delta}(k) = \frac{4\mu^2(x+\mu)^2}{(\mu^2-x^2)^4} \cdot \int dm_1^2\, dm_2^2\, \rho(m_1^2)\rho(m_2^2) \cdot F \tag{A.6.23}$$

mit

$$F := \int dq \left[(\mathbb{1})_{\alpha\beta}(\mathbb{1})_{\gamma\delta} \frac{k^2(\not{q}\not{q}_1) - (k_\nu q'^\nu)(\not{q}\not{q}_1)}{(m_1^2-q'^2-i\varepsilon)(m_2^2-q^2-i\varepsilon)} + \right.$$

$$\left. + (\mathbb{1})_{\alpha\beta}(\gamma^\nu)_{\gamma\delta} \frac{\mu(k_\nu)(\not{q}\not{q}_1)}{(m_1^2-q'^2-i\varepsilon)(m_2^2-q^2-i\varepsilon)} \right] .$$

Es sei hier erwähnt, daß der andere Fall keine zusätzlichen Arten von Integranden mit sich bringt. Bezüglich der Integration stellt dieser Fall daher keine zusätzliche Schwierigkeit dar.

Die Integrale in (A.6.25) sind singuläre Feynman-Integrale. Die verschiedenen Methoden zur Berechnung solcher Integrale sind, in besonderer Anlehnung an die einheitliche Feldtheorie von Heisenberg, in /35/ zusammengefaßt worden. Wir folgen hier dieser Arbeit und verwenden dabei die dort beschriebene Exponentialmethode. Dabei wollen wir hier nur das Integral

$$\mathcal{I}_3 := -\int dm_1^2\, dm_2^2\, \varrho(m_1^2)\,\varrho(m_2^2)\cdot \int dq\, \frac{(k_\nu q'^\nu)(\mathcal{I}_\mu q^\mu)}{(m_1^2 - q'^2 - i\varepsilon)(m_2^2 - q^2 - i\varepsilon)} \tag{A.6.24}$$

im Detail durchführen. Die Berechnung der anderen Integrale verläuft ähnlich.

Bei der Exponentialmethode geht man von den Relationen

$$2\pi\,\delta^+(x) = \int_0^\infty dk\, e^{ik(x+i\varepsilon)} = \frac{i}{x+i\varepsilon} \tag{A.6.25}$$

$$2\pi\,\delta^-(x) = \int_{-\infty}^0 dk\, e^{ik(x-i\varepsilon)} = \int_0^\infty e^{-ik(x-i\varepsilon)}\, dk = \frac{-i}{x-i\varepsilon} \tag{A.6.26}$$

aus /36/. Bevor wir zur Berechnung von I_3 übergehen, fassen wir die für diese Rechnung benötigten Integrale zusammen:

$$\int dk\, e^{i[ak^2 - 2(pk)b]} = \frac{\pi^2}{ia^2}\cdot e^{-i\frac{p^2b^2}{a}} \tag{A.6.27}$$

$$\int dk\, k_\lambda\, e^{i(x)} = \frac{\pi^2 b}{ia^3}\, p_\lambda\, \mathrm{EXP}\left[i\frac{p^2b^2}{a}\right] \tag{A.6.28}$$

$$\int dk\, k_\lambda k_\nu e^{i(X)} = \frac{\pi^2}{i a^3}\left[\frac{i}{2} g_{\lambda\nu} + \frac{P_\lambda P_\nu b^2}{a}\right] \cdot e^{-i\frac{P^2 b^2}{a}} \qquad \text{(A.6.29)}$$

$$\int_a^\infty \frac{e^{ik\alpha}}{k}\, dk = \int \frac{\cos(\alpha k) + i\sin(\alpha k)}{k}\, dk \qquad \text{(A.6.30)}$$

$$= \text{Const.} - \ln a(\alpha + i\varepsilon) + O(a) \qquad (a \longrightarrow +0)$$

$$\int_a^\infty dk \frac{e^{i(k\alpha)}}{k^2} = \left[-\frac{e^{i(k\alpha)}}{k}\right]_a^\infty + i\alpha \int \frac{e^{i(k\alpha)}}{k}\, dk \qquad \text{(A.6.31)}$$

$$\int_0^\infty dk\, e^{ik(\alpha+i\varepsilon)} = \frac{i}{\alpha + i\varepsilon} \qquad \text{(A.6.32)}$$

Das Integral

$$\int_0^1 d\nu \frac{1}{\nu\alpha + (1-\nu)\beta - \nu(1-\nu)\lambda - i\varepsilon} := P(\alpha,\beta) \qquad \text{(A.6.33)}$$

lautet nach /37/:

$$P(\alpha,\beta) = \frac{2}{\sqrt{(\alpha-\beta-\lambda)^2 - 4\beta\lambda - i\varepsilon}} \cdot \ln \frac{\alpha+\beta-\lambda+\sqrt{(\alpha-\beta-\lambda)^2-4\beta\lambda-i\varepsilon}}{2\sqrt{\alpha\beta}}. \qquad \text{(A.6.34)}$$

Das Integral ist außerdem symmetrisch in α und β :

$$P(\alpha,\beta) = P(\beta,\alpha); \quad \alpha,\beta \geq 0.$$

Nun setzen wir (A.6.26) in das Integral

$$\mathcal{J} := -\int dq \, \frac{q'^{\nu} q^{\mu}}{(m_1^2 - q'^2 - i\varepsilon)(m_2^2 - q^2 - i\varepsilon)}$$

ein und erhalten

$$\mathcal{J} = -i(\pi)^2 \int_0^{\infty} \frac{dP_1 \, dP_2}{(P_1 + P_2)^3} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{k^{\nu} k^{\mu} P_1 P_2}{P_1 - P_2} - \frac{i}{2} g_{\mu\nu} \right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left[\frac{i P_1 P_2 k^2}{P_1 + P_2} - i P_1 m_1^2 - i P_2 m_2^2 - \varepsilon (P_1 + P_2) \right],$$

wobei die q -Integration mit (A.6.28) und (A.2.29) durchgeführt wurde.

Führt man die Variablen

$$P_1 =: P\nu \quad ; \quad 0 < P < \infty$$

$$P_2 =: P(1-\nu) \quad ; \quad 0 < \nu < 1$$

mit $P_1 + P_2 := P$ ein, so erhält man

$$\mathcal{J} = -(\pi)^2 i \left\{ \int_0^{\infty} \frac{dP}{P} \int_0^1 \nu(1-\nu) \, d\nu \; k^{\nu} k^{\mu} \cdot \right.$$

$$\exp\left[i k (\nu(1-\nu) k^2 - \nu m_1^2 - (1-\nu) m_2^2 + i\varepsilon) \right] -$$

$$\left. - \frac{i}{2} g_{\nu\mu} \int_0^{\infty} \frac{dP}{P^2} \int_0^1 d\nu \exp\left[i P (\nu(1-\nu) k^2 - \nu m_1^2 - (1-\nu) m_2^2 + i\varepsilon \right] \right\} \cdot$$

Damit ergibt sich dann für $\mathcal{T}_3$:

$$\mathcal{T}_3 = -i\pi^2 (\mathcal{T}_\mu k^\mu)\cdot\left(k^2 B^{(1)} - \frac{1}{2}\varkappa^2 B^{(2)}\right), \tag{A.6.35}$$

mit

$$B^{(1)} := \int_0^\infty d m_1^2\, d m_2^2\, \varrho(m_1^2)\,\varrho(m_2^2)\cdot\int_0^\infty \frac{dP}{P}\int_0^1 \nu(1-\nu)\, d\nu\cdot \tag{A.6.36}$$

$$\cdot\, \exp\left[i P\left(\nu(1-\nu)k^2 - \nu m_1^2 - (1-\nu)m_2^2 + i\epsilon\right)\right]$$

$$B^{(2)} := \frac{i}{\varkappa^2}\int_0^\infty d m_1^2\, d m_2^2\, \varrho(m_1^2)\,\varrho(m_2^2)\int_0^\infty \frac{dP}{P^2}\int_0^1 d\nu\cdot \tag{A.6.37}$$

$$\exp\left[i P\left(\nu(1-\nu)k^2 - \nu m_1^2 - (1-\nu)m_2^2 + i\epsilon\right)\right].$$

Zwischen $B^{(1)}$ und $B^{(2)}$ gilt die Beziehung

$$B^{(1)} = -i\frac{d}{dP^2}B^{(2)},$$

die für die Kontrolle der Ergebnisse benützt werden kann /35/.

Berechnung des Integrals $B^{(1)}$

$$B^{(1)} = \int_0^\infty dm_1^2\, dm_2^2\, \varrho(m_1^2)\, \varrho(m_2^2) \int_0^\infty \frac{dP}{P} \int_0^1 \nu(1-\nu)\, d\nu \cdot$$

$$\cdot \exp\left[i P \left(\nu(1-\nu) k^2 - m_1^2 \nu - (1-\nu) m_2^2 + i\epsilon \right) \right] .$$

Mit (A.6.30) integriert man über P zunächst von $a > 0$ bis ∞ :

$$B^{(1)} = -\int_0^\infty dm_1^2\, dm_2^2\, \varrho(m_1^2)\, \varrho(m_2^2) \int_0^1 \nu(1-\nu)\, d\nu \cdot$$

$$\cdot \left[\ln\left(\nu(1-\nu) k^2 - m_1^2 \nu - (1-\nu) m_2^2 + i\epsilon \right) \right] + O(a) .$$

Man führt jetzt die Spektralintegrationen über m_1^2 und m_2^2 aus, vollzieht den Übergang $a \longrightarrow +0$ und erhält nach Einführung der dimensionslosen Parameter λ und γ :

$$\lambda := \frac{k^2}{\mu^2} \quad ; \qquad \gamma := \frac{m^2}{\mu^2}$$

$$B^{(1)} = -\int_0^1 \nu(1-\nu)\,d\nu \cdot$$

$$\cdot\Bigg[\ln\frac{(1-\nu(1-\nu)\lambda-i\varepsilon)(\gamma-\nu(1-\nu)\lambda-i\varepsilon)}{(\nu+(1-\nu)\gamma-\nu(1-\nu)\lambda-i\varepsilon)(\gamma\nu+(1-\nu)-\nu(1-\nu)\lambda-i\varepsilon)}+$$

$$+\frac{(\gamma-1)(1-\nu)}{(\nu+(1-\nu)\gamma-\nu(1-\nu)\lambda-i\varepsilon)}-\frac{(\gamma-1)(1-\nu)+(\gamma-1)\nu}{\gamma-\nu(1-\nu)\lambda-i\varepsilon}+$$

$$+\frac{(\gamma-1)\nu}{\gamma\nu-(1-\nu)-\nu(1-\nu)\lambda-i\varepsilon}-\frac{\nu(1-\nu)(\gamma-1)^2}{(\gamma-\nu(1-\nu)\lambda-i\varepsilon)^2}\Bigg]\cdot$$

Integriert man den $\ln$ - Term partiell, so gibt der ausintegrierte Term keinen Beitrag. Man erhält dann, nachdem man mit Hilfe der Tafel /37/ über ν integriert hat, für $B^{(1)}$:

$$B^{(1)} = \frac{1}{6\lambda^2}(1-\gamma)^2+\left(\frac{\lambda}{12}-\frac{1}{6}-\frac{2}{3\lambda}\right)P(1,1)-\left(\frac{2}{3\lambda^3}(1-\gamma)^3+\frac{1}{2\lambda^2}(1-\gamma)^2\right)\ln\gamma+ \quad \text{(A.6.38)}$$

$$+\Bigg[\frac{1}{3\lambda^2}(1-\gamma)^4+\frac{1}{2\lambda}(1-\gamma)^2-\frac{\lambda}{6}-\frac{5\gamma}{6\lambda^2}(1-\gamma-\lambda)^2-\frac{\gamma}{\lambda}(1-\gamma-\lambda)+\frac{2\gamma^2}{3\lambda}-$$

$$-\frac{5}{6\lambda^2}(1-\gamma+\lambda)^2+\frac{1}{\lambda}(1-\gamma+\lambda)+\frac{2}{3\lambda}-(1-\gamma)\left(\frac{1}{\lambda^3}(1-\gamma)^3+\frac{3}{\lambda}(1-\gamma)+\right.$$

$$+\frac{1}{\lambda^2}(1-\gamma-\lambda)^2-\frac{1}{2\lambda^2}(1-\gamma+\lambda)^2+\frac{1}{2\lambda}(1-\gamma-\lambda)-\frac{3\gamma}{2\lambda^2}(1-\gamma-\lambda)-$$

$$\left.-\frac{2\gamma}{\lambda}-\frac{3}{2\lambda^2}(1-\gamma-\lambda)+\frac{1}{\lambda}\right)\Bigg]P(1,\gamma)+\Bigg[\frac{\lambda}{2}-\frac{\gamma}{6}-\frac{2\gamma^2}{3\lambda}-\frac{\gamma}{\lambda}(1-\gamma)$$

$$-\frac{3\gamma}{2\lambda^2}(1-\gamma^2)\Bigg]P(\gamma,\gamma)-\frac{\gamma}{2\lambda}(1-\gamma)^2\left.\frac{d}{d\alpha}P(\alpha,\beta)\right|_{\alpha=\beta=\gamma}.$$

Berechnung des Integrals $B^{(2)}$

$$B^{(2)} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dm_1^2\, dm_2^2\, \varrho(m_1^2)\, \varrho(m_2^2) \int_0^\infty \frac{dP}{P^2} \int_0^1 d\nu \,. \qquad \text{(A.6.39)}$$

$$\cdot \exp\left[i P \left(\nu(1-\nu) k^2 - \nu m_1^2 - (1-\nu) m_2^2 + i\varepsilon \right) \right] .$$

Die Integration geschieht auf gleiche Weise wie bei $B^{(1)}$. Man verwendet dabei die Formeln (A.6.30) bis (A.6.32). Es ist außerdem vorteilhaft, zuerst die Spektralintegration durchzuführen. Man erhält nach einer langwierigen Rechnung:

$$B^{(2)} = \frac{(1-\gamma)^2}{3\lambda} - \ln\gamma \left[\frac{(1-\gamma)^3}{3\lambda^2} + \frac{(1-\gamma)^2}{2\lambda} \right] + \qquad \text{(A.6.40)}$$

$$+ \left(-\frac{\lambda^2}{12} + \frac{2}{3}\lambda - \frac{4}{3} \right) \cdot P(1,1) + \left[-\frac{1}{3\lambda^2}(1-\gamma)^4 - \right.$$

$$- \frac{1}{2}(1-\gamma)^2 + \frac{\lambda^2}{6} + \left(\frac{5\gamma}{6\lambda} - \frac{1}{2\lambda} \right) \cdot (1-\gamma-\lambda)^2 +$$

$$\left. + \frac{1}{3\lambda}(1-\gamma+\lambda)^2 - \frac{5}{3}\gamma^2 + 4\gamma - \gamma\lambda - \lambda + \frac{1}{3} \right] \cdot P(1,\gamma) +$$

$$+ \left(-\frac{\lambda^2}{12} + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda\gamma}{6} + \frac{2\gamma^2}{3} - 2\gamma - \frac{\gamma}{\lambda}(1-\gamma)^2 \right) \cdot P(\gamma,\gamma) \cdot$$

Für die anderen Integrale erhält man auf gleiche Weise:

$$\mathcal{J}_1 := \int_0^\infty d m_1^2\, d m_2^2\, \varrho(m_1^2)\,\varrho(m_2^2) \int dq\, (\mathbb{1})_{\alpha\beta}\,(\mathbb{1})_{\gamma\delta} \cdot \tag{A.6.41}$$

$$\cdot \frac{k^2 (\gamma_\mu q^\mu)}{(m_1^2 - q'^2 - i\varepsilon)(m_2^2 - q^2 - i\varepsilon)} = (\mathbb{1})_{\alpha\beta}\,(\mathbb{1})_{\gamma\delta}\,(k^2)(\gamma_\mu k^\mu)(i\pi^2)\cdot$$

$$\cdot \Big[\frac{\lambda-4}{4} \cdot P(1,1) + P(1,\gamma)\cdot \frac{3+\gamma-\lambda}{2} + P(\gamma,\gamma)\cdot \Big(\frac{\lambda - 2\gamma - 2}{4} \; \frac{(\gamma-1)^2}{2\lambda} \Big) -$$

$$- \frac{\gamma(\gamma-1)^2}{\lambda} \frac{d}{d\alpha'} P(\alpha',\beta') \Big|_{\alpha'=\beta'=\gamma} \Big] := (\mathbb{1})_{\alpha\beta}\,(\mathbb{1})_{\gamma\delta}\,(k^2)(\gamma_\mu k^\mu)(i\pi^2)\cdot B$$

und

$$\mathcal{J}_2 := \int_0^\infty d m_1^2\, d m_2^2 \int dq\, \frac{\mu\cdot(k_\nu)(\gamma_\mu q^\mu)}{(m_1^2 - q'^2 - i\varepsilon)(m_2^2 - q^2 - i\varepsilon)} \cdot \tag{A.6.42}$$

$$\cdot (\mathbb{1})_{\alpha\beta}\,(\gamma^\nu)_{\gamma\delta} = (\mathbb{1})_{\alpha\beta}\,(\not{k})_{\gamma\delta} \cdot \mu\,(i\pi^2)(\gamma_\mu k^\mu)\cdot B\,.$$

Mit diesen Ergebnissen für $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_2$ und mit (A.6.35) für $\mathcal{J}_3$ ergibt sich dann für (A.6.23):

$$M_{\alpha\beta\gamma\delta}(k) = \frac{4\mu^2(\varkappa+\mu)^2(i\pi^2)(\gamma_\mu k^\mu)}{(\mu^2-\varkappa^2)^4} \cdot \tag{A.6.43}$$

$$\cdot \Big[(\mathbb{1})_{\alpha\beta}\,(\mathbb{1})_{\gamma\delta}\cdot A + (\mathbb{1})_{\alpha\beta}\,(\not{k})_{\gamma\delta}\cdot\mu\cdot B \Big]$$

mit

$$A := k^2 (B - B^{(1)}) + \frac{\varkappa^2}{2} B^{(2)}.$$

Damit folgt dann für (A.6.16)

$$I_2 = -(2\pi)^3 \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot N \cdot \qquad \text{(A.6.44)}$$

$$\cdot (V_{\sigma_2 \varrho} V_{\varrho_5 \varrho_6})(V_{\varrho_1 \varrho_2} V_{\varrho_3 \varrho_4}) \cdot \left[(k_1' + x)(k_1'^2 + \mu^2) \right]_{\sigma_1 \varrho}^{-1} \cdot$$

$$\cdot \bar{u}_{\sigma_1}(\vec{k}_1') \bar{u}_{\sigma_2}(\vec{k}_2') u_{\varrho_4}(\vec{k}_1) u_{\varrho_3}(\vec{k}_2) \cdot M_{\varrho_5 \varrho_1 \varrho_6 \varrho_2}$$

mit

$$N := \frac{4 g_0^2 \mu^2 (x+\mu)^2 (\gamma_\mu k^\mu)}{(2\pi)^8 x^2 (\mu^2 - x^2)^3} \cdot f_u(k^0 - \omega_1(x))$$

$$M_{\alpha\beta\gamma\delta} := (\mathbb{1})_{\alpha\beta} \cdot (\mathbb{1})_{\gamma\delta} \cdot A + (\mathbb{1})_{\alpha\beta} \cdot (k)_{\gamma\delta} \cdot \mu \cdot B \cdot$$

Anhang VII: Die Vertex-Funktion

Für die Vertex-Funktion erhalten wir aus 3.3:

$$V_{\alpha\beta\gamma\delta} := 2\, B_{\alpha\beta i r}\, C^{r}_{\gamma\delta} \tag{A.7.1}$$

mit

$$B_{\alpha\beta i r} := V_{r} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{\alpha\beta}\,; \quad C^{r}_{\gamma\delta} := V^{r} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\gamma\delta}$$

Man sieht daraus, daß nur nur

$$V_{1121} = -2\, V_{r} \otimes V^{r} \tag{A.7.2}$$

$$V_{2221} = 2\, V_{r} \otimes V^{r}$$

ungleich Null sind sind.

Aus den Beziehungen

$$\hat{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} = V_{\alpha\beta\gamma\delta} + V_{\alpha\gamma\delta\beta} - V_{\alpha\gamma\beta\delta} \tag{A.7.3}$$

und und

$$\tilde{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \hat{V}_{\alpha\beta\delta\gamma} - \hat{V}_{\alpha\beta\delta\gamma} = 2\, \hat{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{A.7.4}$$

folgt dann:

$$\hat{V}_{1211} = 2\, V_{1211} = W_{r} \otimes V^{r} \tag{A.7.5}$$

$$\tilde{V}_{1211} = 2\, \hat{V}_{1211}$$

während alle anderen mit $\hat{V}_{\alpha\beta 11}$ verschwinden.

In der nichtlinearen Spinortheorie verwendet man einen total antisymmetrischen, reellen Vertex $V_{\alpha\beta\gamma\delta}$ /34/. In der ausreduzierten Form, in der wir den Vertex hier benützen werden, lautet er:

$$V_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv V_\mu \otimes V^\mu = \frac{l^2}{2}\left(C_{\alpha\beta} C_{\gamma\delta} + (\gamma_5 C)_{\alpha\beta} (\gamma_5 C)_{\gamma\delta} \right) \qquad \text{(A.7.6)}$$

mit

$$(\gamma^\mu)^T = C \gamma^\mu C .$$

Anhang VIII: Das Verhalten von $P(\alpha, \beta)$ für große Energien

Die Funktion lautet /35/:

$$P(\alpha,\beta,\lambda) \equiv P(\alpha,\beta) := \tag{A.8.1}$$

$$= \int \frac{d\nu}{\nu\alpha + (1-\nu)\beta - \nu(1-\nu)\lambda - i\varepsilon} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(\omega-\lambda)^2 - 4\beta\lambda - i\varepsilon}} \cdot \ln \frac{\alpha + \beta - \lambda + \sqrt{(\omega-\lambda)^2 - 4\beta\lambda - i\varepsilon}}{2\cdot\sqrt{\alpha\cdot\beta}}$$

mit $\omega := \alpha - \beta$.

In unserem Fall ist λ definiert als

$$\lambda = \frac{k^2}{\varkappa^2}$$

Dabei sind k^2 das Quadrat der Gesamtenergie der wechselwirkenden Teilchen und $\varkappa^2$ das Quadrat der Nukleonmasse. α, β sind zwei Parameter, die nur positiv sein müssen. Damit wird der Wurzelausdruck in (A.8.1) positiv für $\lambda > 0$, was hier der Fall ist. Auch die Bedingung $\alpha, \beta > 0$ ist in den Anwendungen immer der Fall.

Um nun das Verhalten dieser Funktion für große Energien zu finden, entwickeln wir die Wurzel für große Werte von λ :

$$\sqrt{(\omega-\lambda)^2 - 4\beta\lambda + i\varepsilon} = (\omega-\lambda)\sqrt{1 - \frac{4\beta\lambda}{(\omega-\lambda)^2}} = \tag{A.8.2}$$

$$= (\omega-\lambda) - \frac{2\beta\lambda}{\omega-\lambda} - \frac{2\beta^2\lambda^2}{(\omega-\lambda)^3} - \frac{4\beta^3\lambda^3}{(\omega-\lambda)^5} - \frac{10\beta^4\lambda^4}{(\omega-\lambda)^7} + O(\lambda^{-4}) \cdot$$

Ferner erhält man auf die gleiche Weise

$$\frac{1}{\sqrt{(\omega-\lambda)^2-4\beta\lambda-i\epsilon}} = \tag{A.8.3}$$

$$= \frac{1}{\omega-\lambda} + \frac{2\beta\lambda}{(\omega-\lambda)^3} + \frac{6\beta^2\lambda^2}{(\omega-\lambda)^5} + O(\lambda^{-4}) .$$

Mit (A.8.2) ergibt sich:

$$\ln \frac{\alpha+\beta-\lambda+\sqrt{(\omega-\lambda)^2-4\beta\lambda-i\epsilon}}{2\sqrt{\alpha\beta}} = \tag{A.8.4}$$

$$= \ln\left\{\left(\frac{-\lambda}{\sqrt{\alpha\beta}}\right)\left(1-\frac{\alpha}{\lambda}-\frac{\beta}{\lambda-\omega}-\frac{\beta^2\lambda}{(\lambda-\omega)^3}-\frac{2\beta^3\lambda^2}{(\lambda-\omega)^5}+O(\lambda^{-4})\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(\alpha\beta) - \ln\lambda -$$

$$-\left[\frac{\alpha+\beta}{\lambda}+\frac{2\alpha\beta+(\alpha+\beta)^2}{2\lambda^2}+\frac{2\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\lambda^3}\right]+O(\lambda^{-4}) .$$

Damit erhält man dann

$$P(\alpha,\beta) \simeq \left(\frac{1}{\omega-\lambda}+\frac{2\beta\lambda}{(\omega-\lambda)^3}+\frac{6\beta^2\lambda^2}{(\omega-\lambda)^5}\right) \cdot \tag{A.8.5}$$

$$\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\ln\alpha\beta - 2\ln\lambda - \frac{2(\alpha+\beta)}{\lambda} -\right.$$

$$\left. - \frac{2\alpha\beta+(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2} - \frac{4\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\lambda^3}\right) + O(\lambda^{-4}) .$$

Entwickelt man den ersten Klammerausdruck weiter, so ergibt sich für $P(\alpha,\beta)$ bei großen Werten von dem Parameter λ :

$$P(\alpha,\beta) \simeq \ln\lambda \cdot \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\alpha+\beta}{\lambda^2} + \frac{(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta}{\lambda^3} \right) - \tag{A.8.6}$$

$$- \frac{1}{2}(\ln\alpha + \ln\beta)\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\alpha+\beta}{\lambda^2} + \frac{(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta}{\lambda^3} \right) +$$

$$+ \left(\frac{\alpha+\beta}{\lambda^2} + \frac{2\alpha\beta + 3(\alpha+\beta)^2}{2\lambda^3} \right) + O(\lambda^{-4}) \cdot$$

Damit erhält man dann für die speziellen Werte der Parameter α und β, die in der Arbeit benötigt werden:

$$P(1,1) \simeq \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2} + \frac{6}{\lambda^3} \right) \ln\lambda + \frac{2}{\lambda^2} + \frac{7}{\lambda^3} + O(\lambda^{-4}) \tag{A.8.7}$$

$$P(1,\gamma) \simeq \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1+\gamma}{\lambda^2} + \frac{(1+\gamma)^2+2\gamma}{\lambda^3} \right) \cdot \ln\lambda - \tag{A.8.8}$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1+\gamma}{\lambda^2} + \frac{(1+\gamma)^2+2\gamma}{\lambda^3} \right) \cdot \ln\gamma$$

$$+ \left(\frac{1+\gamma}{\lambda^2} + \frac{2\gamma + 3(1-\gamma)^2}{2\lambda^3} \right) + O(\lambda^{-4})$$

$$P(\gamma,\gamma) \simeq \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{2\gamma}{\lambda^2} + \frac{6\gamma^2}{\lambda^3} \right) \ln\lambda - \tag{A.8.9}$$

$$- \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{2\gamma}{\lambda^2} + \frac{6\gamma^2}{\lambda^3} \right) \cdot \ln\gamma + \left(\frac{2\gamma}{\lambda^2} + \frac{7\gamma^2}{\lambda^3} \right) + O(\lambda^{-4}) \cdot$$

Ferner erhält man aus (A.8.1):

$$\frac{d}{d\alpha} P(\alpha,\beta)\Big|_{\alpha=\beta=\gamma} = \frac{2\lambda}{\left(\sqrt{\lambda(\lambda-4\gamma)-i\varepsilon}\right)^3} \cdot \tag{A.8.10}$$

$$\cdot\left[\ln\left(2\gamma-\lambda+\sqrt{\lambda(\lambda-4\gamma-i\varepsilon}\right) - \ln 2\gamma\right] - \frac{1}{\gamma\sqrt{\lambda(\lambda-4\gamma)-i\varepsilon}}$$

$$+ 2\left[\frac{\sqrt{\lambda(\lambda-4\gamma)-i\varepsilon}-\lambda}{(2\gamma-\lambda+\sqrt{\lambda(\lambda-4\gamma)-i\varepsilon})(\lambda(\lambda-4\gamma)-i\varepsilon)}\right].$$

Für große Werte von λ lautet die Wurzel:

$$\sqrt{\lambda^2-4\gamma\lambda-i\varepsilon} = \lambda\sqrt{\left(1-\frac{4\gamma}{\lambda}\right)} = \tag{A.8.11}$$

$$= \lambda - 2\gamma - \frac{2\gamma^2}{\lambda} - \frac{4\gamma^3}{\lambda^2} - \frac{10\gamma^4}{\lambda^3} + O(\lambda^{-4})$$

und damit

$$\ln\left(2\gamma-\lambda+\sqrt{\lambda(\lambda-4\gamma-i\varepsilon}\right) - \ln 2\gamma \sim \tag{A.8.12}$$

$$\sim \ln\left[-\frac{\gamma}{4\lambda} - \frac{2\gamma^2}{\lambda^2} - \frac{5\gamma^3}{\lambda^3} + O(\lambda^{-4})\right] =$$

$$= \ln\left[\left(-\frac{\gamma}{4\lambda}\right)\left(1+\frac{8\gamma}{\lambda}+\frac{20\gamma^2}{\lambda^2}+O(\lambda^{-3})\right)\right]$$

$$= \left(\ln 4\lambda - \ln\gamma\right)\left(\frac{8\gamma}{\lambda} - \frac{12\gamma^2}{\lambda^2} + \frac{160\gamma^3}{\lambda^3} + O(\lambda^{-4})\right).$$

Außerdem gelten die Entwicklungen:

$$\frac{2\lambda}{\left(\sqrt{\lambda(\lambda-4\gamma)}-i\varepsilon\right)^3} = \frac{2}{\lambda^2} + \frac{12\gamma}{\lambda^3} + O(\lambda^{-4}) \qquad (A.8.13)$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt{\lambda(\lambda-4\gamma)}-i\varepsilon\right)} = \frac{1}{\lambda} + \frac{2\gamma}{\lambda^2} + \frac{6\gamma^2}{\lambda^3} + O(\lambda^{-4}) \qquad (A.8.14)$$

Mit diesen Entwicklungen erhält man aus (A.8.10) für große Werte des Parameters λ

$$\frac{d}{d\alpha} P(\alpha,\beta)\Big|_{\alpha=\beta=\gamma} = \frac{16}{\lambda^3}\ln 4\lambda - \frac{16\gamma}{\lambda^3}\ln\gamma + \qquad (A.8.15)$$

$$+ 2\cdot\frac{\lambda^3+2\gamma\lambda^2+4\gamma^2+10\gamma^3}{(\gamma\lambda^2+4\gamma^2\lambda+16\gamma^3)(\lambda^2-4\gamma\lambda-i\varepsilon)} -$$

$$- \frac{1}{\gamma\lambda}\left(1+\frac{2\gamma}{\lambda}+\frac{6\gamma^2}{\lambda^2}\right) + O(\lambda^{-4}).$$

Damit kann man nun auch das Verhalten der Funktionen B, $B^{(1)}$ und $B^{(2)}$, die bei der Loop-Integration in Anhang VI auftreten, angeben. Dies braucht man, wenn man den Wirkungsquerschnitt für große Energien untersuchen will. Dafür setzt man die hier angegebenen Ausdrücke für $P(\alpha,\beta)$ und ihre Ableitung in die entsprechenden Relationen für die Funktionen B, $B^{(1)}$ und $B^{(2)}$ aus Anhang VI ein. Es stellt sich heraus, daß die Koeffizienten der drei höchsten Potenzen von λ ($\lambda\ln\lambda$; λ und $\frac{\ln\lambda}{\lambda}$) verschwinden. Diese Funktionen verhalten sich also für große Werte des Parameters λ, d.h. große Energien, mindestens wie $\frac{1}{\lambda}$. Das heißt, daß gilt:

$$B \sim \lambda^{-1} + O(<\lambda^{-1})$$

$$B^{(1)} \sim \lambda^{-1} + O(<\lambda^{-1})$$

$$B^{(2)} \sim \lambda^{-1} + O(<\lambda^{-1}) .$$

Dies nützen wir aus, um das Verhalten des Wirkungsquerschnitts für große Energien zu untersuchen.

Literatur

/1/ W. Heisenberg: Nachr. d. Göttinger Akad. d. Wiss. 1953, S. 111

/2/ W. Heisenberg: Einführung in die einheitliche Feldtheorie der Elementarteilchen, Hirzel Verlag, Stuttgart 1967

/3/ a) H. Mitter: Nuovo Cim. 38 (1965), 1040
b) H.P. Dürr: Quanten und Felder, F. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1971

/4/ a) S.N. Gupta: Proc. Phys. Soc. A63 (1950), 681
b) K. Bleuler: Helv. Phys. Acta 23 (1950), 567

/5/ H.P. Dürr, E. Rudolph: Nuovo Cim. 62A (1968), 411

/6/ W. Heisenberg: Nucl. Phys. 4 (1957), 532

/7/ a) N. Nakanishi: Suppl. Progr. Theor. Phys. 51 (1972), 1
b) Ref. /13/

/8/ a) M. Karowski: Z. Naturforsch. 24a (1969), 510
b) E.C.G. Sudarshan und C.A. Nelson: Quantenfeldtheorie with shadow states I, II; preprint CPT 94, 95, Austin, Texas (March 1971)
c) M. Karowski: Nuovo Cim. 23 (1974), 126
d) H. Stumpf, K. Scheerer: Z. Naturforsch. 34a (1979), 284
e) Ref. /15/

/9/ H. Rampacher, H. Stumpf, F. Wagner: Fortschr. Phys. 13 (1965), 3851

/10/ a) H. Stumpf: Z. Naturforsch. 24a (1969), 188 und 1022
b) H. Stumpf: Z. Naturforsch. 25a (1970), 575 und 795
c) H. Stumpf: Z. Naturforsch. 27a (1972), 1058
d) A. Rieckers: Z. Naturforsch. 26a (1971), 631
f) A. Rieckers: Z. Naturforsch. 27a (1972), 7

/11/ a) H. Stumpf, K. Scheerer: Z. Naturforsch. 30a (1975), 1361
b) H. Stumpf: Z. Naturforsch. 31a (1976), 528

/12/ H. Stumpf: Z. Naturforsch. 30a (1975), 708

/13/ K.L. Nagy: State Vectorspaces with Indefinite Metric in QFTh, Akademiai Kiado, Budapest 1966

/14/ H. Stumpf, K. Scheerer: Z. Naturforsch. 34a (1979), 284

/15/ W. Ferge: Dissertation, Tübingen 1978

/16/ K. Illig: Dissertation, Tübingen 1973

/17/ M.G. El Sheikh: Dissertation, Tübingen (in Vorbereitung)

/18/ P. Roman: Introduction to Quantum Field Theory, J. Wiley, New York

/19/ a) H. Stumpf, K. Scheerer, H.G. Märtl: Z. Naturforsch. 25a (1970), 1556
b) Ref. /10 f)/

/20/ H. Stumpf: Acta Phys. Austr. Suppl. 1A (1972), 195

/21/ H. Stumpf, in: Groups, Systems and Many-Body Physics, P. Kramer, M. Dal Cin (Eds.), Vieweg Verlag, Braunschweig 1980

/22/ J. Schwinger: Proc. Nat. Acad. Sci. 37 (1951), 452

/23/ H. Stumpf: Quanten und Felder, S. 189, Vieweg Verlag, Braunschweig 1971

/24/ a) J. Rzewuski: Field Theory, Iliffe Books, London 1969
b) F.A. Berezin: The Method of Second Quantization, Academic Press, New York 1966)
c) F. Coester: Phys. Rev. 95 (1954), 1318

/25/ Nishijima: Progr. Theor. Phys. 10 (1953), 549

/26/ Ch. Horrix: Diplomarbeit, Tübingen 1978

/27/ H. Stumpf: Z. Naturforsch. 26a (1971), 623

/28/ K. Dammeier: Z. Naturforsch. 27a (1972), 1042

/29/ E. Fick: Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie, Akad. Verlagsgesellschaft, Frankfurt a.M. 1974

/30/ H. Dürr, F. Wagner: Nuovo Cim. 46 (1960), 223

/31/ J.D. Bjorken, S.D. Drell:
a) Relativistische Quantenmechanik, B.I. 98/98a, 1964
b) Relativistische Quantenfeldtheorie, B.I. 101/101a, 1964

/32/ H. Mitter: Relativistische Quantenmechanik, Vorlesung, Tübingen 1974

/33/ S. Gasiorowicz: Elementary Particle Physics, J. Wiley & Sons, New York 1966

/34/ W. Philipp: Dissertation, Tübingen 1975

/35/ E. zur Linden: Diplomarbeit, München 1967

/36/ a) N.N. Bogoliubov, D.V. Shirkov: Introduction to the Theory of Quantized Fields, Interscience, New York 1959
b) S.S. Schweber: An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, Harper & Row, New York 1961

/37/ W. Gröbner, N. Hofreiter: Integraltafeln I, II, Springer, Wien 1961

/38/ H.P. Dürr: MPI-PAE/PTh 23 (Oktober 1974)

Lebenslauf

Geburt:	30. September 1944 in Täbriz / Iran
Eltern:	Muluk (geb. Dabiri) und Hossein Pouradjam, wohnhaft in Täbriz / Iran
Herbst 1950:	Einschulung in Täbriz
Juni 1962:	Reifeprüfung in Täbriz
Herbst 1963:	Beginn des Studiums der Chemie und Physik an der Universität Täbriz
Juni 1966:	Ende des Studiums in Täbriz
Dezember 1966:	Einreise in die Bundesrepublik Deutschland
WS 1967/68:	Beginn des Studiums der Physik an der Universität Tübingen
WS 1968/69:	Diplom-Vorprüfung in Physik
WS 1970 - WS 1974:	Anfertigung der Diplomarbeit mit dem Titel "Numerische Behandlung der myonischen Atome" unter Anleitung von Prof. Dr. H. Mitter
20. August 1975:	Diplomprüfung in Physik
Ab Oktober 1975:	Doktorand bei Prof. Dr. H. Stumpf

Akademische Lehrer: Becker, Dittrich, Elwert, Ibisch, Großer, Krüger, Mack, Mitter, Möllenstedt, Pfister, Stumpf, Wielandt, Wildermuth, Zeller

Druck: D. Gräbner, 8602 Altendorf - Tel. 09545/8791